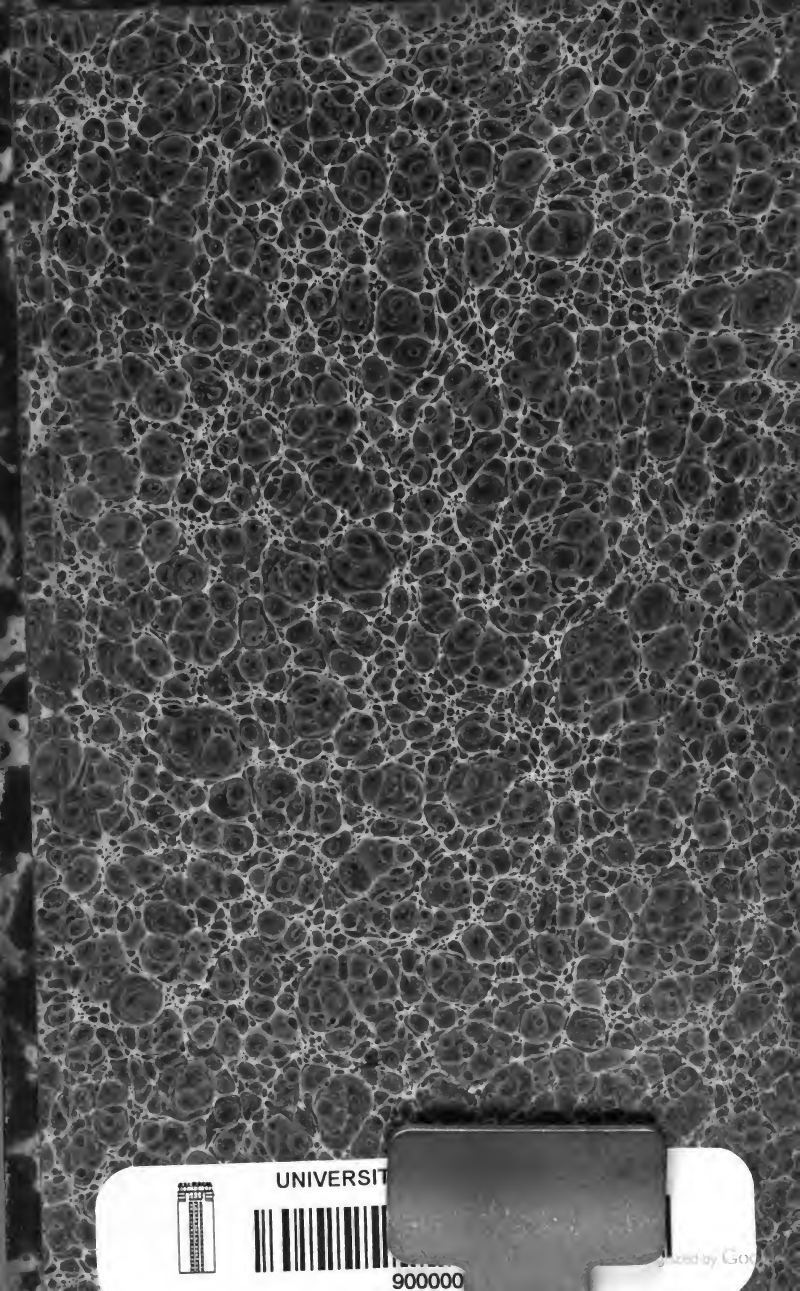
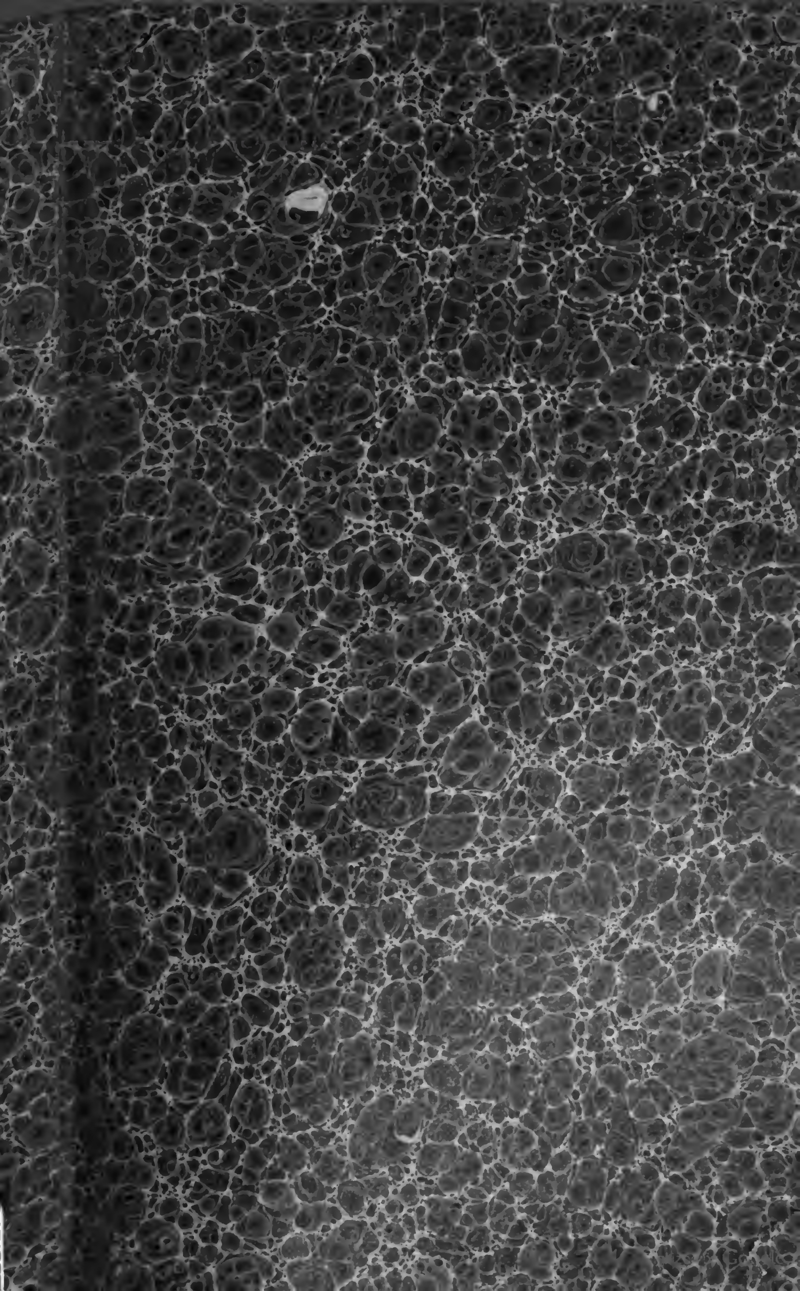



UNIVERSIT
900000



THÉORIE

DES PROBABILITÉS.

TYP. D'ALEX. JAMAR.


La Place

ENCYCLOPÉDIE POPULAIRE.

THÉORIE DES PROBABILITÉS

PAR

AD. QUETELET,

DIRECTEUR DE L'OBSERVATOIRE ROYAL.

Mundum numeri regunt.



BRUXELLES,

Société pour l'émancipation intellectuelle,

A. JAMAR, ÉDITEUR.

AVANT-PROPOS.

Ce petit ouvrage est rédigé sur le même plan que les *Instructions populaires sur le calcul des probabilités,* que j'ai fait paraître en 1828 et que l'on a traduites dans différentes langues. La première édition est épuisée depuis plus de vingt ans ; l'édition nouvelle contient les résultats de différents écrits que j'ai insérés dans les *Mémoires de l'Académie royale de Belgique* et dans le *Bulletin de la commission centrale de statistique du royaume.* Je n'ai pu développer cependant autant que je l'aurais voulu la partie qui concerne les sciences morales et politiques ; les personnes qui désireraient de plus amples renseignements sur cette branche si intéressante et en même temps si nouvelle de la science, pourront les

trouver dans mes *Lettres à S. A. R. le Duc régnant de Saxe-Cobourg et Gotha sur la théorie des probabilités appliquées aux sciences morales et politiques*[1]. Celles qui voudraient plus de développements mathématiques pourront consulter les traités français de Laplace, Poisson, Lacroix, Cournot, les ouvrages allemands et anglais de Gauss, Hagen, Fischer, Th. Galloway, Aug. de Morgan, et le *Calcul des probabilités* récemment publié à Bruxelles par M. le capitaine Liagre, qui a donné de ces écrits un résumé très-substantiel.

La théorie des probabilités devrait servir de base à l'étude de toutes les sciences d'observation; je m'estimerais heureux si cet opuscule pouvait contribuer à en propager le goût et à en faire apprécier l'importance.

Bruxelles, le 20 juin 1853.

QUETELET.

[1] Un volume in-8°. Bruxelles, chez Hayez, 1846.

THÉORIE

DES

PROBABILITÉS.

PREMIÈRE PARTIE.

PROBABILITÉS QUAND LES CHANCES SONT CONNUES.

---

1. Origine et importance de la théorie des probabilités.

La science qui va nous occuper est d'origine récente : elle doit sa naissance à une question futile, faite par un homme du monde à l'un des penseurs les plus profonds du XVIIe siècle. En 1654, le chevalier de Méré avait proposé à Pascal deux problèmes relatifs au jeu; l'immortel auteur des *Lettres provinciales* satisfit la curiosité du joueur; il entrevit en même temps, dans les questions qui lui avaient été soumises, les germes d'une branche nouvelle des mathématiques, à laquelle il donna le nom de *Géométrie aléatoire;* et que ses successeurs nommèrent indistinctement *Calcul conjectural*, *Arithmétique politique*, *Théorie des probabilités*, etc.

La théorie des probabilités fut successivement cultivée par les esprits les plus distingués, par les penseurs les plus profonds : elle eut pour promoteurs Pascal, Fermat, Leibnitz, Huygens, Halley, Buffon, les frères Bernoulli, d'Alembert, Condorcet, La Place, Fourier. Elle fixa également l'attention de plusieurs hommes d'État d'un mérite éminent, qui surent apprécier les féconds résultats qu'on était en droit d'en attendre.

Cependant, cette théorie si favorablement jugée par les plus beaux génies des temps modernes, cette théorie qui devrait servir de base à toutes les sciences d'observation, est loin, aujourd'hui même, d'avoir pris le rang qui lui revient. Il y aurait lieu de s'en étonner, si l'histoire n'était là pour nous apprendre combien il faut de temps pour que les plus belles découvertes parviennent à se faire jour dans les masses, où elles sont cependant destinées à se fixer et à produire leurs plus beaux fruits.

Les sciences font des progrès d'autant plus rapides, que les connaissances acquises sont plus exactes et qu'on est parvenu à les exprimer d'une manière plus précise. Or, nous sommes si peu avancés à cet égard, surtout dans les sciences d'observation, que nous confondons à tout instant la certitude avec la probabilité, et ce qui est probable avec ce qui n'est que possible. Ces méprises ne se rencontrent pas seulement chez les gens du monde, on pourrait en citer des exemples chez un grand nombre de savants, d'un mérite d'ailleurs incontestable.

On a vu plus d'une fois repousser avec dédain l'assertion que nos connaissances en astronomie, ou même en physique, ne reposent en général que sur des probabilités plus ou moins grandes. Cependant, nous n'avons de certitude réelle que sur très-peu d'objets. Les vérités mathématiques, par exemple, sont de ce nombre : ce qui ne tend pas à établir qu'il faille se livrer à un pyrrhonisme désolant, et révoquer en doute les bienfaits de la science.

Le principe de l'attraction a permis d'expliquer avec une admirable simplicité les phénomènes de notre système planétaire ; il a fait dépendre de la résolution d'un problème de mécanique analytique, l'appréciation des mouvements divers que l'observation avait reconnus dans les corps célestes. Bien plus,

le même principe, soumis au calcul, a mis en évidence des faits qui auraient échappé à la sagacité des observateurs les plus exercés et munis des instruments les plus délicats. Qui oserait prétendre cependant que ce principe soit l'expression la plus complète d'une loi de la nature? Qui pourrait affirmer que ce n'est point un cas particulier d'une loi beaucoup plus générale? Malgré les raisons que nous avons de ne pas attribuer la certitude au principe de l'attraction, sous son énoncé actuel, nous l'employons néanmoins avec le plus grand succès, pour calculer les phénomènes de notre système planétaire, et pour en prédire les retours avec une précision telle, qu'elle est l'objet de l'admiration générale des hommes.

On pourrait en dire autant de la plupart des principes de la physique et de toutes les sciences qui reposent sur l'observation. Il n'existe pas de motifs suffisants pour les prendre avec certitude, et comme s'ils énonçaient, dans toute sa plénitude, le mode d'action de la nature; mais les probabilités pour les considérer comme tels, sont en général si fortes, que nous ne faisons pas difficulté de leur attribuer, dans le plus grand nombre des cas, une valeur équivalente à celle de la certitude.

Il y a une infinité d'intermédiaires entre l'impossible et le certain. Pour aller de l'un à l'autre, la probabilité peut varier en passant par des nuances innombrables; sur cent assertions, il n'en est peut-être pas deux qui présentent le même degré de probabilité. Presque toujours, nous apprécions fort mal ces nuances; et, par suite, nos jugements sont plus ou moins grossiers. Pour bien des personnes, les choses ne sont guère probables que d'une seule manière : si la probabilité d'un événement est très-grande, elles la prennent pour la certitude; si elle est très-faible, au contraire, elles estiment l'événement impossible.

Les sciences ne sauraient s'accommoder d'appréciations aussi défectueuses. Ces aperçus vagues sont tolérables tout au plus dans les affaires ordinaires de la vie.

Il serait intéressant de rechercher quelles sont approximativement les limites que la probabilité doit atteindre, pour prendre, aux yeux des gens du monde, les degrés de la certitude ou de

l'impossibilité. Ces limites ne sont pas les mêmes pour tous les hommes, ni, chez un même homme, pour toutes les choses indistinctement. Une foule de circonstances influent à cet égard sur nos jugements. Nos passions surtout font mettre bien souvent sur la même ligne des événements dont les probabilités sont essentiellement différentes. Les variations de la probabilité sont pour l'entendement, ce que les nuances des couleurs sont pour un œil exercé, ou ce que l'échelle diatonique serait pour l'oreille qui pourrait en apprécier tous les degrés.

A la théorie des probabilités se rattachent un grand nombre de questions qui sont de nature à exciter la curiosité et qui méritent au plus haut point l'attention du philosophe et de l'homme d'État. Parmi les applications diverses que l'on peut faire de cette théorie, je choisirai de préférence celles qui se rapportent à l'homme et à son état social ; nous y trouverons une mine de découvertes utiles, que nos prédécesseurs ont à peine entrevue et qui reste encore presque entièrement à exploiter.

Le calcul des probabilités n'est que l'instrument qui doit servir à régulariser les travaux d'exploitation ; il doit en effet nous aider à distribuer avec avantage la série de nos observations, à estimer la valeur des documents dont nous ferons usage, à distinguer ceux qui exercent le plus d'influence, à les combiner ensuite de manière qu'ils s'écartent le moins possible de la vérité, et à calculer en définitive le degré de confiance qu'on peut attacher aux résultats obtenus. La théorie ne nous enseigne qu'à faire avec plus de régularité et de précision, ce qu'ont fait jusqu'à présent, d'une manière plus ou moins vague, les esprits les plus judicieux. Elle tend surtout, dans les phénomènes dont nous aurons à nous occuper, à substituer la science à ce que l'on est convenu de nommer la pratique ou l'expérience, et ce qui n'est, la plupart du temps, qu'une aveugle routine.

2. De la probabilité et de la certitude.

Lorsque différents cas peuvent donner naissance à un événement, on les nomme les *chances* de cet événement. Ainsi, le tirage d'une carte dans un jeu ordinaire, présente 32 chances, puisque l'on peut prendre indifféremment l'une des 32 cartes dont le jeu se compose.

Quand la nature de l'événement qu'on espère est désignée, il existe deux espèces de chances, les unes *favorables* et les autres *contraires* à l'événement espéré. Ainsi, celui qui désirerait prendre une figure dans un jeu de 32 cartes, aurait 12 chances pour lui ; et 20 chances lui seraient contraires.

Si toutes les chances sont favorables, leur ensemble constitue la *certitude*.

On dit, d'une manière absolue, qu'un événement est *probable*, quand la plupart des chances sont favorables à son arrivée, et qu'il est *possible* ou peu probable, quand le nombre des chances contraires surpasse le nombre des chances favorables. L'événement sera *douteux*, si le nombre des chances favorables égale le nombre des chances défavorables.

On conçoit que tous les événements ne sont pas également probables. *On estime la probabilité mathématique en divisant le nombre des chances favorables à l'événement, par le nombre total des chances*. D'après ce principe, le tirage d'une figure dans un jeu de 32 cartes aurait, pour probabilité, la fraction $\frac{12}{32}$; on a, en effet, 12 chances favorables sur un nombre total de 32 chances.

La probabilité *contraire* à l'événement attendu s'estime de la même manière ; c'est-à-dire, en divisant le nombre des chances défavorables par le nombre total des chances. Ainsi, dans l'exemple précédent, la probabilité contraire à l'événement attendu est $\frac{20}{32}$.

En général, chaque événement incertain donne lieu à deux probabilités opposées, savoir : celle que cet événement arrivera,

et celle qu'il n'arrivera pas : *la somme de ces deux probabilités doit être égale à l'unité.* L'unité devient ainsi le symbole de la certitude.

L'application de la théorie des probabilités ne présenterait guère de difficultés, si l'on pouvait toujours énumérer les diverses chances possibles, et si toutes ces chances étaient rigoureusement les mêmes. Mais il n'en est pas ainsi; et, dans certains cas, il faut beaucoup de sagacité pour ne pas commettre des erreurs graves dans ces sortes d'appréciations. De tous les jeux, le plus simple est sans contredit celui de pile ou croix, puisqu'il n'y a que deux chances possibles, et que la pièce doit tomber nécessairement sur l'une ou l'autre de ses deux faces. La probabilité de chacun des deux événements est donc $\frac{1}{2}$. Cependant si la pièce n'était pas homogène, si elle était construite de manière à tomber plus facilement sur une face que sur l'autre, il est évident que les deux probabilités ne pourraient plus être représentées respectivement par la fraction $\frac{1}{2}$. Si la pièce, par exemple, tombait régulièrement deux fois sur une face, tandis qu'elle ne tomberait qu'une fois sur l'autre, on pourrait considérer le jet de cette pièce comme présentant trois chances possibles, dont deux pour une face et une seule pour l'autre face : les probabilités respectives seraient $\frac{2}{3}$ et $\frac{1}{3}$.

Des joueurs frauduleux se ménagent des avantages semblables, en jouant avec des dés pipés. Quand un dé à six faces est bien construit, il doit pouvoir tomber avec une égale facilité sur chacune de ses faces : le jet de l'as, par exemple, doit avoir la même probabilité que celui de tout autre point. Cependant on peut altérer le dé, soit sous le rapport de l'homogénéité de la matière, soit sous le rapport de la forme, de manière à rendre la probabilité du jet de l'as aussi grande ou aussi petite que l'on veut.

On conçoit qu'on pourrait jouer avec un dé semblable, pourvu que l'on pût tenir rigoureusement compte de l'inégalité des chances pour l'arrivée de chaque point.

La difficulté que nous rencontrons ici, se reproduit à chaque instant dans l'appréciation des probabilités concernant les phénomènes de la nature. La difficulté devient plus grande encore,

en ce que le dé, pour continuer notre comparaison, présente, non-seulement des faces inégales, mais en ce que l'on ne sait pas même combien il a de faces.

Telle est effectivement la condition dans laquelle nous met la nature, quand nous cherchons à sonder ses secrets et à évaluer les probabilités respectives des événements qui peuvent arriver. On croit souvent avoir tout prévu, avoir soigneusement énuméré les circonstances qui pouvaient se présenter, et l'on se trouve très-étonné de voir, après l'expérience, que l'événement n'est aucun de ceux qu'on attendait. On dit alors que c'est le hasard qui l'a amené; mais que signifie ce mot, sinon l'ignorance où nous étions que notre dé avait encore une face que nous n'avions pas aperçue et sur laquelle nous ne supposions pas qu'il dût tomber? Le mot *hasard* sert officieusement à voiler notre ignorance; nous l'employons pour expliquer des effets dont nous ne connaissons point les causes. Pour qui saurait tout prévoir, il n'y aurait jamais de hasard; et les événements qui nous paraissent les plus extraordinaires auraient leurs causes naturelles et nécessaires, comme les événements qui nous semblent les plus communs.

Une autre comparaison, puisée également dans la théorie du jeu, pourra nous prêter de nouvelles lumières. Supposons qu'on nous présente une urne remplie de boules qui ne diffèrent entre elles que par la couleur, et qu'on demande la probabilité que la première boule tirée sera blanche. Il est évident que, pour porter un jugement motivé, il nous faudra des renseignements préalables. Pour que ces renseignements soient complets, nous viderons l'urne et nous examinerons combien de boules de chaque couleur s'y trouvent contenues. Or, je suppose qu'il y en ait 2 blanches, 3 noires et 4 rouges, en tout 9 boules; nous devrons répondre que la probabilité que la première boule tirée sera blanche, est $\frac{2}{9}$.

Cette évaluation, comme l'on voit, ne présente pas de difficulté, quand on peut s'assurer du nombre de boules que contient l'urne, et de la manière dont ces boules sont distribuées sous le rapport de la couleur. En général, dans les différents jeux qu'on nomme jeux de hasard, le nombre des chances est limité et leur

nature est connue; mais il n'en est pas de même dans ce qui se rapporte aux sciences d'observation. L'urne est ouverte devant nous; il nous est permis de faire autant de tirages que nous voulons et de multiplier les épreuves à loisir, mais ce n'est que par induction que nous pouvons connaître ce qu'elle renferme.

Il faut donc s'appuyer sur des considérations nouvelles, pour estimer la probabilité d'un événement quand le nombre des chances est illimité, et que nous ignorons comment les chances sont distribuées. Cet inconvénient se présente malheureusement dans le plus grand nombre des cas qui doivent nous occuper, c'est-à-dire dans l'appréciation des probabilités des phénomènes sociaux et des phénomènes naturels.

D'après la distinction que nous venons d'établir, l'ouvrage se partagera naturellement en deux parties : dans la première, nous parlerons des probabilités des événements dont le nombre et la nature des chances sont *connus;* dans la seconde, des probabilités des événements dont le nombre et la nature des chances sont *inconnus*, et qu'on détermine approximativement par l'observation. Pour abréger, on distingue le plus souvent ces deux cas par les mots probabilités *a priori,* et probabilités *a posteriori;* c'est des premières que nous nous occuperons d'abord.

3. De la probabilité mathématique simple.

Nous venons de voir que, dans le cas où toutes les chances d'un événement sont également possibles, la probabilité *mathématique* s'estime en divisant le nombre des chances favorables à l'événement par le nombre total des chances. Ainsi, la probabilité de prendre un roi dans un jeu de 32 cartes, est $\frac{4}{32}$; la probabilité contraire est $\frac{28}{32}$; et la somme de ces deux probabilités est $\frac{4}{32}$ plus $\frac{28}{32}$ ou bien 1 qui représente la certitude. De là nous déduirons cette règle qu'*il suffit de soustraire de 1 la probabilité mathématique favorable à l'événement, pour avoir la probabilité contraire.*

La probabilité mathématique d'un événement doit, d'après ce qui précède, être exprimée par une fraction proprement dite, puisque le nombre des chances favorables ne peut, en aucun cas, surpasser le nombre total des chances.

On conçoit que plus le nombre des chances sera considérable par rapport au nombre total des chances possibles, plus la probabilité de cet événement sera forte. La probabilité $\frac{12}{32}$ est plus grande que la probabilité $\frac{4}{32}$; on exprimerait, de la première manière, la probabilité mathématique de prendre une figure dans un jeu de 32 cartes; et, de la seconde, la probabilité mathématique de prendre un des quatre *as*.

Quand on veut comparer deux probabilités mathématiques, il faut les réduire au même dénominateur; par exemple, on demande si le jet de l'*as* avec un dé à six faces est plus probable que le tirage d'une figure en trèfle dans un jeu de 32 cartes. Or, la première probabilité est $\frac{1}{6}$ et la seconde $\frac{3}{32}$; les fractions réduites au même dénominateur donnent $\frac{32}{192}$ et $\frac{18}{192}$. Le premier événement est donc plus probable que le second.

Le défaut d'habitude d'estimer les probabilités des événements, fait que nous nous trompons la plupart du temps sur leurs valeurs; il nous faudrait, avant tout, *un terme comparable* qui pût servir à rectifier nos jugements. Le moyen le plus simple semblerait être de concevoir les chances favorables et défavorables, représentées numériquement par des boules blanches et noires, qui seraient contenues dans une urne; l'arrivée de l'événement attendu serait assimilée au tirage d'une boule blanche.

Exemple. Quelle est la probabilité de jeter l'*as* avec un dé à six faces? Comme nous n'avons qu'une seule chance sur six, la probabilité est $\frac{1}{6}$, la même que celle de prendre une boule blanche dans une urne qui contient six boules, savoir : une boule blanche et cinq boules noires. Ou bien encore, quelle est la probabilité de prendre un roi dans un jeu de 32 cartes? Comme nous avons 4 chances favorables sur 32, la probabilité est $\frac{4}{32}$, la même que celle de prendre une boule blanche dans une urne qui contient 32 boules, savoir : 4 blanches et 28 noires.

En faisant croître ou décroître, dans un même rapport, le

nombre des chances favorables et celui de toutes les chances possibles, la probabilité reste la même. Ainsi, au lieu de la probabilité $\frac{4}{32}$, on peut prendre la probabilité $\frac{1}{8}$ qui lui est égale. La probabilité de prendre une boule blanche dans une urne qui contient 32 boules, savoir : 4 blanches et 28 noires, est donc la même que celle de prendre une boule blanche dans une urne qui contient 8 boules, savoir : 1 blanche et 7 noires. Ce moyen de *simplification* qui dépend de la propriété des fractions, nous sera souvent utile.

Le mode que nous venons d'indiquer pour estimer la valeur des probabilités présente cependant un inconvénient ; c'est qu'il nous serait assez difficile d'apprécier quelle grandeur doit atteindre la probabilité pour pouvoir être classée parmi celles que nous avons l'habitude de considérer comme des certitudes. Le meilleur terme de comparaison semblerait être la probabilité de vivre encore un certain espace de temps. Cette *mesure* nous sera plus sensible, par le prix que nous attachons généralement à la vie, que toute autre plus précise dont nous sommes rarement dans le cas d'user. Or, les tables de mortalité que nous ferons connaître plus tard, montrent que, sur un nombre donné de jeunes gens de 20 ans, le dixième a cessé d'exister au bout de 7 ans environ : ainsi, à cet âge, la probabilité de mourir dans l'espace de 7 ans, est $\frac{1}{10}$; celle de mourir dans l'espace de 8 mois est de $\frac{1}{100}$ seulement. Le tableau suivant auquel on pourra recourir au besoin, fait connaître les probabilités de mourir dans un terme plus ou moins rapproché.

Probabilité	de mourir avant
$\frac{1}{10}$	7 ans.
$\frac{1}{100}$	8 mois.
$\frac{1}{1000}$	25 jours.
$\frac{1}{10\,000}$	60 heures.
$\frac{1}{100\,000}$	6 heures.
$\frac{1}{1\,000\,000}$	36 minutes.
$\frac{1}{10\,000\,000}$	4 minutes.
$\frac{1}{100\,000\,000}$	22 secondes.
$\frac{1}{2\,000\,000\,000}$	1 seconde.

On conçoit que ces résultats ne peuvent être pris que d'une manière générale, et qu'ils ne sont pas applicables à un individu en particulier, qui serait actuellement bien portant. Il faut les considérer comme des probabilités que l'enfant qui vient de naître, s'il atteint l'âge de 20 ans, mourra pendant la période désignée au tableau.

Supposons maintenant que l'on cherche à savoir quelle est la probabilité qu'en prenant les lettres du mot *Constantinople,* et qu'en les jetant en l'air, elles recomposeront le mot. On sait, par des calculs qui ne peuvent trouver place ici, que nos 14 lettres peuvent être arrangées de plus de 87 000 000 000 de manières différentes, en ne reproduisant que 24 fois le même mot, on aurait donc pour probabilité du jet désiré $\frac{24}{87\,000\,000\,000}$, c'est-à-dire une probabilité moindre que celle de mourir dans l'espace d'une seconde, à l'âge de 20 ans. Or, nous ne faisons pas difficulté de regarder comme certain que l'enfant qui vient de naître, s'il atteint l'âge de 20 ans, pourra compter encore sur une seconde d'existence; on peut donc regarder aussi comme certain qu'on ne jettera pas du premier coup le mot *Constantinople* avec les lettres qui le composent.

Nous croyons pouvoir admettre qu'en général le jeune homme, arrivé à l'âge de 20 ans, vivra encore 36 minutes, ou une demi-heure environ; or, cet événement a, pour probabilité contraire, la fraction $\frac{1}{1\,000\,000}$; ainsi, nous regardons à peu près

comme certains les événements qui ont, pour probabilités contraires, des fractions moindres qu'un millionième ; tel serait le tirage d'une boule blanche dans une urne qui contiendrait un million de boules, savoir : 999 999 blanches et 1 noire.

4. De la probabilité mathématique composée.

Quand un événement dépend à la fois de plusieurs événements *indépendants* les uns des autres, on dit qu'il est *composé*. Ainsi, le jet successif de l'*as* et du point *deux*, avec un dé ordinaire à six faces, est un événement composé qui dépend de deux événements entièrement indépendants l'un de l'autre, savoir : le jet de l'*as* et celui du point *deux*.

Les événements indépendants les uns des autres sont des événements *simples*. Dans notre exemple précédent, l'arrivée de l'événement composé dépendait de deux événements simples, qui sont le jet de l'*as* et le jet du point *deux*.

Nous avons déjà vu précédemment que la probabilité d'un événement simple, que nous nommerons *probabilité simple*, s'estime en divisant le nombre des chances favorables par le nombre total des chances.

La probabilité composée, c'est-à-dire la probabilité mathématique d'un événement composé, s'obtient en faisant le produit des probabilités de tous les événements simples dont cet événement composé dépend. Par exemple, la probabilité de jeter l'*as* et de jeter ensuite le point *deux* avec un dé ordinaire, se calculerait de la manière suivante : la probabilité d'amener un *as* avec un dé est $\frac{1}{6}$; et celle d'amener le point *deux* est également $\frac{1}{6}$. Le produit des deux probabilités est $\frac{1}{36}$, et forme la probabilité de l'événement attendu. En effet, on reconnaîtra avec un peu d'attention qu'il y a 36 chances également possibles sur lesquelles une seule est favorable, comme on peut le voir par le tableau suivant :

1	et 1	2	et 1	3	et 1	4	et 1	5	et 1	6	et 1
1	2	2	2	3	2	4	2	5	2	6	2
1	3	2	3	3	3	4	3	5	3	6	3
1	4	2	4	3	4	4	4	5	4	6	4
1	5	2	5	3	5	4	5	5	5	6	5
1	6	2	6	3	6	4	6	5	6	6	6

Si, sans établir de distinction dans l'ordre des sorties, on avait demandé la probabilité d'amener, en deux jets successifs, une fois l'*as* et une fois le point *deux*, cette probabilité eût été $\frac{2}{36}$, ou bien $\frac{1}{18}$; sur les 36 chances, en effet, il y en avait 2 favorables à l'événement attendu; celle de jeter d'abord l'*as*, et puis *deux*, et celle de jeter d'abord *deux*, et puis l'*as*.

Dans l'ancienne loterie génoise, on supposait une urne contenant 90 numéros, portant les nombres 1, 2, 3, 4, etc. Le tirage d'une boule constituait l'*extrait simple*, celui de deux boules formait l'*ambe* qui était *déterminé* si l'on indiquait l'ordre de sortie. Ainsi, quand on jouait sur l'ambe déterminé, on avait pour la sortie du premier nombre indiqué, la probabilité $\frac{1}{90}$ et pour celle du second $\frac{1}{89}$; ce qui donnait, pour la probabilité de l'événement composé, le produit de ces deux fractions ou $\frac{1}{8010}$. On n'avait donc qu'une chance de gagner sur 8010 chances.

Prenons un autre exemple dans le jeu de cartes, et cherchons quelle est la probabilité de prendre successivement l'as, le roi, la dame et enfin le valet de cœur dans un jeu de 32 cartes, *en ayant chaque fois l'attention de remettre dans le jeu la carte tirée?* L'événement composé dépend ici de quatre événements simples, qui ont chacun leur probabilité égale à $\frac{1}{32}$; la probabilité composée vaudra donc $\frac{1}{32}\times\frac{1}{32}\times\frac{1}{32}\times\frac{1}{32}$ ou bien $\frac{1}{1\,048\,576}$. Ainsi l'événement qu'on attend est moins probable que la supposition qu'un jeune homme mourra précisément pendant les 36 minutes qui suivront l'instant où il aura atteint sa vingtième année. Nous savons que des événements qui ont une aussi faible probabilité sont considérés comme tout à fait extraordinaires.

Quand l'événement est composé d'un grand nombre d'événements simples, la probabilité décroît très-rapidement; elle peut même être assez faible pour qu'il devienne difficile de se faire

une idée de sa valeur. Je vais en donner un exemple : Supposons qu'il soit question de prendre 200 fois de suite une boule blanche dans une urne contenant des boules blanches et noires en nombre égal ; on a d'ailleurs la précaution de remettre chaque fois dans l'urne la boule tirée, pour rester dans les mêmes conditions. Il faudra faire, ici, un produit dans lequel la fraction $\frac{1}{2}$, probabilité du tirage d'une boule blanche, sera deux cents fois facteur. Or, ce produit qui exprime la probabilité de l'événement demandé, est une fraction qui a, pour numérateur, l'unité, et, pour dénominateur, un nombre exprimé par 61 chiffres. Il serait très-difficile de se faire une juste idée de cette fraction, et plus difficile encore de l'énoncer. Qu'il nous suffise de dire que si, depuis l'époque de la création, en la faisant remonter à 5857 années, on n'avait cessé de tirer des boules d'une urne, avec une rapidité telle qu'on en eût pris cent millions par seconde, le nombre des tirages ne serait représenté que par *dix-neuf chiffres*.

En supposant une urne de la grandeur de notre globe, pleine de petites boules ayant un rayon d'un millionième de millimètre seulement, c'est-à-dire infiniment moindres que des grains de poussière, le nombre de ces boules ne serait représenté que par *quarante-huit chiffres ;* qu'est-ce donc en comparaison de toutes les chances que présentent deux cents boules à tirer !

Certes, en l'absence de la théorie, on ne se serait guère douté qu'il fût plus difficile de prendre deux cents fois de suite une boule blanche dans une urne contenant des boules blanches et des boules noires en nombre égal, que de saisir, en un tirage, le seul grain de poussière blanc que pourrait renfermer notre globe, soit à sa surface, soit à son intérieur.

5. Des épreuves répétées.

Nous nommerons *épreuves répétées* celles qui se font successivement dans les mêmes circonstances comme dans l'exemple qui termine le chapitre précédent ; et comme seraient,

encore, les tirages de mêmes cartes prises dans un jeu et remises chaque fois ; ou les jets successifs d'un même point avec un dé.

La probabilité, quand il s'agit d'épreuves répétées, se calcule comme pour les événements composés.

Exemple. L'on espère, avec un dé à six faces, amener l'*as* trois fois de suite ; la probabilité mathématique sera $\frac{1}{6}\times\frac{1}{6}\times\frac{1}{6}$ ou $\frac{1}{216}$: l'événement attendu dépend en effet de trois événements simples dont il faut multiplier les probabilités entre elles. On espère prendre dans un jeu de 32 cartes, soit un roi, soit une dame trois fois de suite, en ayant soin de remettre, à chaque nouveau tirage, la carte que l'on a prise ; la probabilité sera $\frac{1}{4}\times\frac{1}{4}\times\frac{1}{4}$: en observant que l'événement dépend de trois événements simples qui ont chacun pour probabilité $\frac{1}{4}$, puisqu'on a pour soi 8 chances sur 32.

Quelle est la probabilité, dans deux épreuves répétées au jeu de *pile ou croix*, d'amener d'abord pile et puis croix? La probabilité sera $\frac{1}{4}$, c'est-à-dire $\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}$, le produit des probabilités des deux événements simples. La probabilité eût été $\frac{1}{2}$, si l'on avait posé la condition d'amener une fois pile et une fois croix, n'importe dans quel ordre ; il peut en effet arriver quatre événements composés qui ont chacun pour probabilité $\frac{1}{4}$; savoir : le jet de pile deux fois de suite ; le jet de croix deux fois de suite ; le jet de pile et croix, et enfin le jet de croix et pile. Or, on a pour soi les probabilités des deux derniers événements, c'est-à-dire, $\frac{1}{4}+\frac{1}{4}$ ou bien $\frac{1}{2}$.

On remarquera qu'en général, dans la répétition de deux épreuves, il ne se présente que quatre événements possibles, quand chaque épreuve ne peut amener, comme dans l'exemple précédent, que deux événements simples différents, que nous désignerons par les lettres A et B ; ces événements seront :

AA, AB, BA, BB.

Si l'on faisait une troisième épreuve, le nombre des événements possibles se trouverait doublé, et l'on en aurait huit ; en effet, avec chacun des quatre événements indiqués, pourrait se

présenter encore ou l'événement A, ou l'événement B, ce qui donnerait lieu aux événements composés qui suivent :

AAA, ABA, BAA, BBA. . . . . . pour A.
AAB, ABB, BAB, BBB. . . . . . pour B.

Si l'on faisait une quatrième épreuve, le nombre des événements possibles se trouverait doublé encore et l'on en aurait seize ; en effet, avec chacun des huit événements indiqués, pourrait se présenter encore ou l'événement A, ou l'événement B, ce qui donnerait lieu aux événements composés qui suivent :

AAAA, ABAA, BAAA, BBAA
AABA, ABBA, BABA, BBBA } . . . pour A.
AAAB, ABAB, BAAB, BBAB
AABB, ABBB, BABB, BBBB } . . . pour B.

En suivant les mêmes raisonnements, on trouverait qu'en faisant une cinquième épreuve, le nombre des événements possibles se trouverait doublé encore et ainsi de suite, de manière qu'on pourrait former le petit tableau suivant :

Nombre d'épreuves.		Événements possibles.
1 . . .	2.	= 2.
2 . . .	4.	= 2. 2.
3 . . .	8.	= 2. 2. 2.
4 . . .	16.	= 2. 2. 2. 2.
5 . . .	32.	= 2. 2. 2. 2. 2.
6 . . .	64.	= 2. 2. 2. 2. 2. 2.
7 . . .	128.	= 2. 2. 2. 2. 2. 2. 2.
8 . . .	256.	= 2. 2. 2. 2. 2. 2. 2. 2.
9 . . .	512.	= 2. 2. 2. 2. 2. 2. 2. 2. 2.
10 . . .	1024.	= 2. 2. 2. 2. 2. 2. 2. 2. 2. 2.

On voit que le nombre des événements composés différents devient considérable quand on a égard à l'ordre dans lequel se présentent les événements simples ; on le forme en multipliant successivement 2 par lui-même.

Exemple. Supposons qu'on veuille connaître la probabilité que, dans une urne qui contient une boule blanche et deux noires, on prendra dans quatre tirages, les deux premières fois, une boule blanche, et les deux dernières fois, une boule noire, en ayant la précaution de remettre chaque fois la boule tirée. En consultant le tableau que nous avons formé plus haut, on trouvera que, sur seize événements possibles, un seul est favorable à l'attente, savoir AABB. Nous supposons que A désigne l'arrivée de la boule blanche ; et B, l'arrivée d'une boule noire. Or, la probabilité de l'événement A est $\frac{1}{3}$, et celle de l'événement B est $\frac{2}{3}$; donc, la probabilité demandée sera

$$\frac{2}{3}\times\frac{2}{3}\times\frac{1}{3}\times\frac{1}{3}=\frac{4}{81}.$$

La probabilité contraire serait $\frac{77}{81}$, en observant que les deux probabilités ajoutées ensemble doivent reproduire l'unité.

En général, si, dans des épreuves répétées, on espère qu'un événement A arrivera un certain nombre de fois, et qu'un événement B arrivera aussi un nombre de fois désigné, et si de plus l'ordre de sortie est indiqué ; la probabilité demandée sera un produit qui renfermera la probabilité simple de l'événement A autant de fois en facteur que cet événement doit arriver de fois, et la probabilité de l'événement B aussi autant de fois en facteur que le second événement doit arriver de fois.

Exemple. Quelle est la probabilité de prendre dans un jeu de 32 cartes, deux fois de suite une figure, puis trois fois de suite un as? La probabilité de prendre une figure étant $\frac{3}{8}$, et celle de prendre un as $\frac{1}{8}$, on aura pour la probabilité demandée :

$$\frac{3}{8}\cdot\frac{3}{8}\cdot\frac{1}{8}\cdot\frac{1}{8}\cdot\frac{1}{8}=\frac{9}{32768}.$$

Si l'on n'avait pas égard à l'ordre dans lequel se présentent les événements simples, le nombre possible des événements composés se trouverait considérablement réduit dans les épreuves répétées. Ainsi, en se bornant à une épreuve, on n'aurait que deux événements possibles.

Dans deux épreuves répétées, l'événement A pourrait arriver

deux fois de suite, ou n'arriver qu'une fois, ou ne point arriver du tout, comme il suit :

AA, AB, BB.
BA.

Dans trois épreuves répétées, l'événement A peut arriver 3 fois, 2 fois, 1 fois ou pas une seule fois :

AAA, AAB, BBA, BBB
ABA, BAB
BAA, ABB.

Dans quatre épreuves répétées, l'événement A peut arriver 4 fois, 3 fois, 2 fois, 1 fois ou pas une seule fois :

AAAA, AAAB, AABB, BBBA, BBBB.
AABA, ABAB, BBAB.
ABAA, BAAB, BABB.
BAAA, ABBA, ABBB.
BBAA.
BABA.

On remarquera que nous n'avons fait que donner une autre disposition aux tableaux qui précèdent. L'analogie nous conduit ici à former la table suivante :

Épreuves répétées.	Événements.
1.	2. = 1 + 1
2.	3. = 2 + 1
3.	4. = 3 + 1
4.	5. = 4 + 1
5.	6. = 5 + 1
6.	7. = 6 + 1
7.	8. = 7 + 1
8.	9. = 8 + 1
9.	10. = 9 + 1
10.	11. = 10 + 1

Ainsi, quand on ne tient pas compte de l'ordre dans lequel se présentent les événements simples, le nombre des événements composés et différents entre eux qu'il est possible de former, est égal au nombre des épreuves répétées plus 1.

Exemple. Si l'on demande la probabilité que, dans une urne qui contient une boule blanche et deux noires, on prendra, dans quatre tirages, deux fois une boule blanche et deux fois une boule noire, sans préciser l'ordre de la sortie, et en ayant la précaution de remettre chaque fois la boule tirée, on verra, par le tableau de la page précédente, que cet événement peut arriver de six manières; il faudra donc prendre 6 fois la probabilité qu'un de ces événements aura lieu, c'est-à-dire $6 \times \frac{4}{81}$ ou bien $\frac{24}{81}$; la probabilité contraire est $\frac{57}{81}$.

On peut réunir en sa faveur plusieurs probabilités différentes : comme si, dans l'exemple précédent, on espérait prendre, dans quatre tirages, *au moins* deux fois une boule blanche, on aurait pour soi la probabilité que nous avons calculée, plus les probabilités de prendre quatre ou trois boules blanches.

Ces sortes de calculs deviennent excessivement simples par l'emploi de l'algèbre [1]. Il est un cas dans lequel le calcul numérique se simplifie beaucoup ; c'est quand on demande la probabilité qu'un événement désigné arrivera au moins une fois dans un nombre donné d'épreuves répétées. Comme on aurait seulement contre soi la probabilité que l'événement attendu n'arriverait pas du tout, on calculerait cette probabilité et on la retrancherait de l'unité.

Exemple. On demande la probabilité de jeter l'*as*, au moins une fois, avec un dé à six faces, et dans trois épreuves répétées : la probabilité de ne pas jeter l'*as* est $\frac{5}{6}$, et la probabilité de ne pas jeter l'*as*, dans trois épreuves consécutives, est $\frac{5}{6} \times \frac{5}{6} \times \frac{5}{6}$ ou bien $\frac{125}{216}$. Comme c'est la seule probabilité que l'on ait contre soi, en la retranchant de 1, on aura la probabilité de l'événement qu'on espère ; sa valeur sera $\frac{91}{216}$, c'est-à-dire un peu moindre qu'un demi.

[1] Supposons en effet que la fraction a représente la probabilité d'un événement A, et que la probabilité de l'événement contraire B soit représentée par la

6. De la probabilité relative.

Entre les diverses chances qui peuvent amener un événement, l'attention ne se fixe parfois que sur quelques-unes d'entre elles, en abandonnant toutes les autres. Si l'on demandait, par exemple, la probabilité de prendre, dans un jeu de 32 cartes, une figure ou bien un as ; on aurait trois événements possibles dont les probabilités seraient :

$\frac{12}{32}$ pour une figure,
$\frac{4}{32}$ pour un as,
$\frac{16}{32}$ pour une carte qui n'est ni un as ni une figure.

Or, dans le cas qui nous occupe, le tirage d'une carte qui ne serait ni un as ni une figure devrait être considéré comme non avenu, et il faudrait regarder comme n'ayant de valeur réelle que

fraction b, on aura, après un nombre m d'épreuves, les probabilités de tous les événements composés possibles, dans le développement suivant du binôme :

$$(a+b)^m = a^m + ma^{m-1}b + \frac{m(m-1)}{1.\ 2.}a^{m-2}b^2 + \frac{m(m-1)\ (m-2)}{1.\ 2.\ 3.}a^{m-3}b^3 + \text{etc.}$$

La fraction a^m exprimera la probabilité que l'événement B se reproduira m fois de suite.

Le terme $ma^{m-1}b$ exprimera la probabilité que l'événement A se produira $m-1$ fois et l'événement B une fois.

Le terme $\frac{m\,(m-1)}{1.\ 2.}\,a^{m-2}b^2$ exprimera la probabilité que l'événement A se produira $m-2$ fois, et l'événement B deux fois, et ainsi de suite.

Remarquons, de plus, que la somme de toutes les probabilités doit équivaloir à la certitude; ce qui arrive en effet, car $a+b$, somme des deux probabilités contraires, vaut l'unité, à quelque puissance qu'on élève cette somme dans le premier membre de l'équation.

Quand les deux probabilités a et b sont égales, il vient

$$1 = (\tfrac{1}{2})^m \left\{ 1+m+\frac{m(m-1)}{1.\ 2.}+\frac{m(m-1)(m-2)}{1.\ 2.\ 3.}+\text{etc.} \right\}$$

d'où

$$2^m = \left\{ 1+m+\frac{m\,(m-1)}{1.\ 2.}+\text{etc.} \right\} = \textit{la somme}$$

de tous les événements possibles après un nombre m d'épreuves.

les probabilités $\frac{12}{32}$ et $\frac{4}{32}$ qui peuvent amener l'événement attendu. Ces deux valeurs sont entre elles dans le rapport de 12 à 4, ou de 3 à 1. La probabilité de prendre une figure est donc triple de celle de prendre un as. Ce sont les valeurs *relatives* des probabilités des deux événements que l'on compare.

Si dans une urne on avait 20 boules, savoir : 8 blanches, 4 noires, 3 rouges et 5 vertes; on aurait, pour le tirage, quatre sortes de chances dont les probabilités seraient

$\frac{8}{20}$ pour une boule blanche,
$\frac{4}{20}$ — noire,
$\frac{3}{20}$ — rouge,
$\frac{5}{20}$ — verte.

La somme de ces probabilités, comme dans l'exemple précédent, doit valoir l'unité. Si l'on demande les probabilités *relatives* d'amener une boule blanche ou une noire, les valeurs seront respectivement $\frac{8}{20}$ et $\frac{4}{20}$; l'une est double de l'autre. C'est comme si les boules rouges et vertes n'existaient pas, et comme si l'urne ne contenait que 8 boules blanches et 4 boules noires : ce qui donnerait les probabilités relative $\frac{8}{12}$ et $\frac{4}{12}$, qui sont effectivement comme 2 est à 1.

Prenons encore un troisième exemple. Quelles sont les probabilités de jeter avec deux dés 7, 8, 9 et 10 points? 7 points peuvent être amenés de six manières différentes avec deux dés, comme on peut s'en assurer par le petit tableau que nous avons donné plus haut, p. 19 ; car on peut jeter 1 et 6, 2 et 5, 3 et 4, 4 et 3, 5 et 2, 6 et 1. De même, 8 points peuvent être amenés de cinq manières; 9, de quatre manières; et 10, de trois manières seulement. On aura donc, pour la probabilité de ces sortes de chances, en observant qu'il y a 36 jets également possibles :

$\frac{6}{36}$ pour amener 7 points
$\frac{5}{36}$ — 8 »
$\frac{4}{36}$ — 9 »
$\frac{3}{36}$ — 10 »
$\frac{18}{36}$ pour les autres points.

Nous voyons que la probabilité d'amener 7 points avec deux dés est relativement double de celle d'amener 10 points : on a effectivement six chances favorables au premier événement et trois chances seulement pour le second, sur neuf chances en tout, en omettant les autres chances qui ne font ni perdre ni gagner.

Quelquefois un événement dépend de plusieurs chances qui ne sont pas *également possibles ;* il faut alors *déterminer les probabilités respectives de ces chances ; et la probabilité de l'événement attendu se composera de leur somme.* Ainsi, dans l'exemple précédent, deux personnes pouvaient être amenées à parier, l'une qu'elle jetterait, avec deux dés, les points 7, 8, 9 ou 10; et la seconde qu'elle jetterait un autre point quelconque. Or, d'après ce que nous avons vu, les quatre événements qui peuvent faire gagner le premier joueur ne sont pas également possibles ; les probabilités respectives des chances de ces événements sont $\frac{6}{36}$, $\frac{5}{36}$, $\frac{4}{36}$ et $\frac{3}{36}$ dont la somme vaut $\frac{18}{36}$; c'est la probabilité que le premier joueur a pour lui, et elle est exactement égale à celle du second joueur.

La probabilité de prendre une figure ou un as dans un jeu de 32 cartes vaudrait $\frac{12}{32}$ plus $\frac{4}{32}$, ou bien $\frac{16}{32}$; somme des deux probabilités qu'on réunit en sa faveur.

Nous conclurons de tout ce qui précède qu'il importe d'examiner, dans chaque question proposée, si l'événement attendu est *simple* ou *composé;* et si les chances qui doivent l'amener sont *toutes également possibles* ou si elles ne le sont pas. Enfin, il faudra reconnaître si la probabilité doit être prise d'une manière *absolue* ou *relative,* c'est-à-dire si les chances favorables doivent être comparées à toutes les chances ou à quelques-unes en particulier.

7. De quelques cas particuliers du calcul de la probabilité mathématique.

En nous occupant des épreuves répétées, nous avons supposé que le nombre des chances restait le même à chaque nouvelle épreuve; mais cette circonstance peut ne pas avoir lieu. Ainsi, quelle est la probabilité que, dans deux épreuves, on prendra une figure dans un jeu de 32 cartes, si l'on ne remet pas la carte tirée la première fois? On peut gagner de deux manières, soit en prenant une figure à la première épreuve, soit en prenant une figure à la seconde épreuve. Or, la probabilité de prendre une figure au premier tirage est $\frac{12}{32}$. Quant au second tirage, il devient inutile, si l'on gagne au premier; il n'est donc pas certain qu'on doive le faire, et sa probabilité est $\frac{20}{32}$ ou $\frac{5}{8}$, c'est-à-dire qu'elle est égale à la probabilité qu'on ne réussira pas au premier tirage. Mais si ce second tirage a lieu, il doit se faire sur 31 cartes dont 12 sont favorables à notre attente. La probabilité de prendre une figure serait donc $\frac{12}{31}$, si l'on pouvait regarder le tirage comme certain, et il est $\frac{5}{8}\times\frac{12}{31}$, puisqu'il n'a que $\frac{5}{8}$ de probabilité. On a de cette manière, pour l'événement qu'on espère, une probabilité égale à $\frac{3}{8}+\frac{5}{8}\times\frac{12}{31}$.

Prenons un second exemple. Une urne renferme deux boules blanches et deux boules noires; et deux joueurs A et B conviennent que celui des deux qui, les yeux bandés, tirera le premier une boule blanche, gagnera. Ils doivent tirer alternativement, et A doit commencer; on demande la probabilité que chacun a en sa faveur, en supposant qu'on ne remette pas les boules tirées? Au premier tirage, la probabilité de prendre une boule blanche est $\frac{2}{4}$ ou $\frac{1}{2}$. Le second tirage n'est pas certain, il a pour probabilité $\frac{1}{2}$, c'est-à-dire la probabilité que le joueur A aura pris une boule noire la première fois. Si le second tirage a lieu, comme il reste dans l'urne deux boules blanches et une noire, la probabilité de sortie d'une des premières sera $\frac{2}{3}$; et, dans le cas qui nous occupe, elle sera $\frac{1}{2}\times\frac{2}{3}$ ou bien $\frac{1}{3}$, parce que le second tirage

3

est douteux. La probabilité de la sortie de la boule noire sera $\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}$ ou bien $\frac{1}{6}$; c'est aussi la probabilité du troisième tirage. Mais comme, cette troisième fois, l'urne ne contient que des boules blanches, on a la certitude d'en prendre une; il faudra donc multiplier 1 par $\frac{1}{6}$ probabilité de faire le troisième tirage. Ainsi le joueur A réunit, en sa faveur, les probabilités $\frac{1}{2}+\frac{1}{6}$, et le second joueur a la probabilité $\frac{1}{3}$: ces probabilités réunies valent 1, symbole de la certitude, comme on devait s'y attendre.

Voici un autre exemple qui, au premier abord, offre quelque difficulté. On place, devant une personne, deux urnes dont l'une contient 2 boules blanches et 5 noires et dont l'autre contient 3 boules blanches et une noire. Quelle est la probabilité de prendre une boule blanche dans l'une de ces urnes? La probabilité que la personne qui doit faire le tirage prendra une boule blanche dans la première urne, dépend de deux événements, du choix de l'urne d'abord et du tirage ensuite. Or, en supposant qu'il n'y ait pas de motifs de préférence, la probabilité que la première urne sera choisie est $\frac{1}{2}$; et la probabilité qu'on y prendra une boule blanche est $\frac{2}{7}$. La probabilité de prendre une boule blanche, dans la première urne, sera donc $\frac{1}{2}\times\frac{2}{7}$ ou bien $\frac{1}{7}$. La probabilité de prendre une boule blanche dans la seconde urne sera de même $\frac{1}{2}\times\frac{3}{4}$ ou bien $\frac{3}{8}$. Ainsi la probabilité de prendre une boule blanche, dans l'une ou l'autre des deux urnes, sera $\frac{1}{7}+\frac{3}{8}$.

Nous finirons par un exemple qui montrera combien on doit être en garde, dans le calcul des probabilités, contre les premiers aperçus. On croit assez généralement qu'en faisant, au hasard, des tirages dans une urne renfermant un certain nombre de boules, il est indifférent de parier qu'on en tirera un nombre pair ou un nombre impair. Cependant en pariant pour le nombre impair, on a toujours une chance de plus en sa faveur que si l'on pariait pour le nombre pair. Par exemple, si l'urne ne renfermait qu'une boule, il n'y aurait qu'une chance, et elle serait favorable à celui qui aurait parié pour le nombre impair. Si l'urne renfermait deux boules a et b, on pourrait faire les trois tirages suivants :

$$a,\ b,\ ab;$$

les deux premiers tirages sont impairs, le troisième est pair.

Si l'urne renfermait trois boules *a, b* et *c,* on pourrait faire les sept tirages :

a, b, c, abc, ab, ac, bc;

les quatre premiers tirages sont impairs; les trois derniers sont pairs. Si l'urne renfermait quatre boules *a, b, c* et *d,* on pourrait faire quinze tirages

a, b, c, d, abc, abd, acd, bcd;
ab, ac, ad, bc, bd, cd, abcd.

Les huit premiers tirages sont impairs; les sept autres sont pairs. En général les probabilités seraient les suivantes :

Nombre de boules.	Probabilité de tirer un nombre impair.	Probabilité de tirer un nombre pair.
1	1	0
2	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$
3	$\frac{4}{7}$	$\frac{3}{7}$
4	$\frac{8}{15}$	$\frac{7}{15}$
5	$\frac{16}{31}$	$\frac{15}{31}$
6	$\frac{32}{63}$	$\frac{31}{63}$
7	$\frac{64}{127}$	$\frac{63}{127}$
8	$\frac{128}{255}$	$\frac{127}{255}$
9	$\frac{256}{511}$	$\frac{255}{511}$
10	$\frac{512}{1023}$	$\frac{511}{1023}$

on pourra facilement conclure par induction comment il faudrait continuer ce tableau; car, dans la probabilité mathématique de tirer un nombre impair, le numérateur de chaque fraction est égal au double du numérateur de la fraction précédente; le denominateur vaut le double de son numérateur diminué d'une unité.

8. De l'espérance mathématique.

Dans son origine, la théorie des probabilités n'avait pour mission que d'établir des principes d'équité entre les joueurs, de déterminer les enjeux et de régler les partages dans le cas où l'on quitterait la partie sans l'avoir terminée. L'équité veut, en effet, que les deux joueurs soient placés dans une position telle qu'aucun d'eux n'ait d'avantages sur l'autre. Ainsi, quand ils ont des chances égales de gagner, ils doivent exposer les mêmes sommes; mais, *quand les probabilités de gagner ne sont pas les mêmes, les joueurs doivent exposer des sommes proportionnelles à ces probabilités.*

Dans une loterie, dans la loterie génoise par exemple, où l'on compte 90 numéros, celui qui placerait sur cinq de ces numéros, devrait exposer 5 francs, tandis que l'autre joueur qui a, en sa faveur, les 85 numéros restants, devrait exposer 85 francs : les enjeux seraient dans le rapport de 5 à 85 ou de 1 à 17, c'est-à-dire comme les probabilités respectives de gagner. Cela se conçoit : en effet, supposons 90 chances égales et 90 joueurs; chacun de ces joueurs ayant une de ces chances, sera dans le même cas que ses voisins et exposera autant qu'eux, 1 franc par exemple; sa probabilité de gagner sera $\frac{1}{90}$. Mais une personne peut se substituer à cinq de ces joueurs, en payant leurs mises; et une autre personne peut également se substituer aux 85 joueurs restants, en payant aussi leurs mises; la première devrait donc payer 5 francs; et, la seconde, 85. Ces sommes sont justement dans le rapport des chances ou des probabilités que les deux joueurs ont de gagner.

Quand le premier joueur gagnera, il recevra donc, pour 5 francs qu'il a exposés, la somme de 90 francs, c'est-à-dire son enjeu, plus celui de la personne avec laquelle il joue. S'il reçoit moins de 90 francs, le jeu n'est pas équitable, et il se fait à son détriment. C'est ce qui a lieu dans la loterie génoise : le

joueur, au lieu de 90 francs auxquels il aurait droit, ne reçoit que 75 francs; les 15 autres francs forment le bénéfice de l'entrepreneur des jeux.

On sait qu'à la loterie génoise, un tirage comprend cinq numéros. Si, au lieu de jouer sur l'*extrait simple*, on jouait sur l'*extrait déterminé*, ou sur la sortie d'un seul numéro à une place marquée dans le tirage, la première, par exemple, on n'aurait pour soi qu'une probabilité égale à $\frac{1}{90}$; et, en exposant un franc, on devrait recevoir 90 francs en cas de gain ; au lieu de cette somme, on ne reçoit que 70 francs ; donc le bénéfice de l'entrepreneur est de 20 francs.

L'*ambe,* ou la sortie de deux numéros désignés pour un même tirage, ne rend que 270 fois la mise, tandis que l'on devrait recevoir cette mise 400 fois environ ; car, avec les 90 numéros de la loterie, on peut faire 4,005 ambes en prenant toutes les combinaisons deux à deux ; et avec les cinq numéros que l'on a choisis, on peut former 10 ambes ; la probabilité de la sortie d'un ambe est donc $\frac{10}{4005}$.

La perte du joueur, et par conséquent le bénéfice de l'entrepreneur qui exploite la loterie, devient plus considérable encore quand on joue sur le *terne,* le *quaterne* ou le *quine.* L'avantage de l'entrepreneur, qui n'était que $\frac{3}{18}$ pour l'extrait simple, s'élève, pour le quine, jusqu'aux $\frac{42}{43}$ de toute la somme exposée.

On a nommé *espérance mathématique le produit d'une somme qu'on espère, multipliée par la probabilité qu'on a de l'obtenir.* Ainsi, quand on met sur l'extrait simple dans la vue de recevoir une somme de 15 francs, l'espérance mathématique se calcule en multipliant 15 francs par la fraction $\frac{5}{90}$ ou $\frac{1}{18}$ qui exprime la probabilité de l'obtenir ; on a donc $\frac{15}{18}$ d'un franc ou 83 centimes ; telle est la somme qu'il faudrait équitablement exposer au lieu de celle de 1 franc.

Il faut, dans toute espèce de jeu ou de pari équitable, que les espérances mathématiques des joueurs soient égales. Or, on a déjà pu voir combien, dans la loterie génoise, les règles de l'équité sont peu observées à l'égard du joueur, et combien l'entrepreneur fait payer cher le plaisir de jouer. On pourrait dire

de la loterie ce que Buffon disait du *pharaon*, « le banquier n'est qu'un fripon avoué, et le ponte une dupe, dont on est convenu de ne pas se moquer [1]. »

Les jeux de hasard se prêtent parfaitement bien aux applications de la théorie des probabilités, et chaque joueur peut se rendre compte de sa position, non-seulement en entrant au jeu, mais encore à chaque instant de la partie, de sorte que, s'il convenait aux joueurs de se séparer, ils sauraient comment ils doivent partager entre eux les sommes exposées, en tenant compte de leurs positions respectives. Ces applications, du reste, sont plus curieuses qu'utiles.

Il n'en est pas de même, quand il s'agit des sociétés d'assurances; ces sociétés diffèrent essentiellement des maisons de jeux, surtout sous le rapport de la moralité. Des deux côtés on expose des sommes, mais dans des vues bien différentes : l'assuré est généralement guidé par des motifs de prudence et d'économie; le joueur au contraire par l'imprévoyance et la dissipation. Un père de famille sans fortune prélèvera, sur les modestes produits de ses travaux, quelques faibles sommes qu'il déposera annuellement, dans la vue d'assurer, après son décès, une pension à sa veuve. Pour régler équitablement ce qu'il doit payer, il faut recourir à la considération des probabilités composées.

Ces sortes de calculs n'offrent pas de difficultés; mais ils sont aussi variés que les combinaisons auxquelles se prêtent les sociétés d'assurances sont nombreuses; il en sera parlé plus loin dans ce traité.

9. De l'espérance morale.

L'homme sage et prudent évite les jeux et les paris, lors même qu'il est sûr de voir observer toutes les règles de la plus stricte équité, surtout s'il s'agit d'exposer des sommes un peu considérables. A côté de la question mathématique, en effet,

[1] *Essai d'arithmétique morale*, ch. XII.

s'en présente une autre d'un ordre plus élevé. N'aurions-nous pas droit de montrer à un ami qui expose la moitié de sa fortune, quelles peuvent être les suites de son imprudence? Ne devrions-nous pas lui faire sentir que les privations qu'il devra s'imposer en cas de perte ne peuvent nullement être compensées par les avantages qu'il obtient s'il gagne? Il ne suffit pas que les principes mathématiques soient strictement observés, ceux de la morale doivent l'être également. Si un homme me présentait un pistolet chargé, en m'invitant à jeter pile ou croix pour savoir qui de nous deux tirera sur l'autre, certainement je le tiendrais pour fou, et je n'accepterais pas sa proposition, bien qu'il pût prétendre que les probabilités mathématiques d'être tué sont exactement les mêmes pour tous deux.

Lorsqu'il s'agit de sommes exposées, le préjudice en perdant est sans doute moins grand; cependant il peut aussi, dans certains cas, compromettre notre existence, notre honneur. On ne doit, en général, exposer que ce qui peut être perdu, sans aucun inconvénient et sans que la fortune du joueur se trouve lésée : en d'autres termes, il ne faut exposer que des sommes minimes en comparaison de ce que l'on possède. « L'avare est comme le mathématicien, dit Buffon, dans son *Essai d'arithmétique morale;* tous deux estiment l'argent par sa quantité numérique, l'homme sensé n'en considère ni la masse ni le nombre; il n'y voit que les avantages qu'il peut en tirer; il raisonne mieux que l'avare et sent mieux que le mathématicien. L'écu que le pauvre a mis à part pour payer un impôt de nécessité, et l'écu qui complète les sacs d'un financier n'ont pour l'avare et le mathématicien que la même valeur; celui-ci les comptera par unités égales, l'autre se les appropriera avec un plaisir égal, au lieu que l'homme sensé comptera l'écu du pauvre pour un louis, et l'écu du financier pour un liard. » C'est dans ce sens, en effet, qu'il convient d'estimer l'importance d'une somme en la comparant à ce qu'on possède; et *cette importance, qu'on nomme la valeur morale, s'évalue en divisant la somme par le bien que possède la personne qui l'expose.* Ainsi, 1000 francs pour celui qui n'en possède que 2000, ont la même importance morale que 500,000 fr. pour celui qui possède un million.

En adoptant cette manière de calculer, on reconnaîtra sans peine que le jeu, réglé de la manière la plus équitable, ne peut être que défavorable à l'un et à l'autre joueur. Pour rendre la chose plus sensible, je supposerai qu'une personne qui ne possède que 2000 francs, en expose 1000 au jeu de pile ou croix. La valeur morale de cette somme sera $\frac{1}{2}$, tandis que la valeur morale des 1000 francs qu'elle obtient, en cas de gain, sera représentée par $\frac{1}{3}$ seulement. Ainsi, par rapport aux 2000 francs que cette personne possède, l'importance de la somme exposée se trouve représentée par 1000 francs, et celle de la somme gagnée, par 666,67 ; il y a donc une différence de 333,33 francs entre l'enjeu et le bénéfice. C'est là le détriment moral auquel s'est exposé le joueur.

Ce détriment peut, à la vérité, devenir très-minime, quand l'argent exposé ne forme qu'une faible partie de la fortune du joueur : aussi la différence entre les valeurs morales de la somme mise au jeu et de la somme espérée doit être considérée alors comme étant sensiblement nulle.

Ainsi, supposons que dans l'exemple précédent le second joueur possède 100 000 francs; l'importance de la perte et celle du gain de 1000 francs seront représentées pour ce joueur par les fractions

$$\frac{1000}{100\,000} \text{ et } \frac{1000}{101\,000}, \text{ ou } \frac{1}{100} \text{ et } \frac{1}{101};$$

et la diminution de la valeur morale de sa fortune sera la différence de ces deux dernières fractions, ou bien $\frac{1}{10\,100}$ de $100\,000 = 9,90$ francs. Les positions des deux joueurs que nous considérons sont donc bien différentes.

Il est facile de voir par les calculs précédents que tout jeu quel qu'il soit, lorsqu'on joue de la manière même la plus équitable, doit produire une diminution dans la valeur morale de la fortune. Cette diminution peut devenir à la vérité presque insensible quand on n'expose que de petites sommes, relativement à ce qu'on possède. La prudence doit donc nous mettre en garde contre les jeux qui se présentent même sous les formes les plus équitables : cette règle que nous indique le bon sens, se trouve justifiée ici par le calcul.

On nomme espérance morale le produit de la valeur morale d'une somme multipliée par la probabilité qu'on a de l'obtenir. Ainsi, dans l'exemple des deux joueurs que nous venons de citer, les probabilités de gagner étaient, toutes deux, égales à $\frac{1}{2}$; mais les valeurs morales des sommes espérées étaient $\frac{1000}{3000}$ pour le premier joueur, et $\frac{1000}{101\,000}$ pour le second joueur : ce qui donnait, pour les espérances morales :

$\frac{1000}{6000}$ de sa fortune, au 1er joueur;
$\frac{1000}{202\,000}$ » au 2e joueur.

ou bien

$\frac{1}{6}$ de 2000 francs = 333,33 au 1er joueur,
$\frac{1}{202}$ de 100000 francs = 495,05 au 2e joueur.

En calculant les espérances mathématiques, au lieu des espérances morales, on aurait obtenu 500 francs pour chacun des joueurs. On voit, par les résultats précédents, que les deux joueurs ont du désavantage à exposer leur argent, mais le désavantage est beaucoup plus considérable pour le premier que pour le second, qui possède une fortune plus grande.

On peut être arrêté par une difficulté, quand il s'agit d'apprécier l'importance d'une somme pour un individu qui actuellement ne possède rien. Mais il est à remarquer que, pour celui qui vit du travail de ses mains, ce travail même représente un capital qui forme sa fortune. Celui qui mendie pour soutenir son existence, trouve dans son état des ressources qu'il n'échangerait pas contre telle somme qu'on lui compterait annuellement, sous forme de revenu fixe. Il n'y a guère que le malheureux mourant de faim qui puisse être considéré comme ne possédant absolument rien.

Les mêmes considérations devraient nous porter à ne jamais exposer notre fortune entière aux chances d'un seul événement. Si j'avais à transporter en Amérique une somme considérable, je ne voudrais pas la placer sur un seul vaisseau ; en cas de naufrage, je serais ruiné. Si je divise la somme sur plusieurs vaisseaux ayant tous la même chance d'être détruits, je cours le

risque de faire des pertes partielles, mais je crains peu de voir se réaliser l'événement composé d'où dépendrait la perte totale de mon avoir.

La prudence doit défendre également de placer toute sa fortune entre les mains d'une seule personne, quelles que soient les garanties qu'elle présente.

Il ne faut pas non plus qu'un pays s'occupe exclusivement d'un genre de culture. Si celle-ci venait à manquer, le désastre serait très-sensible; tandis qu'en variant les genres de culture, les chances de voir manquer à la fois toutes les récoltes d'une année sont extrêmement faibles; le mal n'est senti que partiellement. Depuis que la nourriture du pauvre est plus variée, les disettes qui affligeaient si souvent nos aïeux, sont devenues à peu près impossibles. C'est un bienfait en même temps qu'une conséquence des progrès de la civilisation.

Buffon, dont les écrits ont contribué à répandre beaucoup de jour sur la question qui nous occupe, présente l'exemple suivant pour mieux faire apprécier combien, dans les jeux même les plus équitables sous le rapport mathématique, la position des deux joueurs est également défavorable. « Si deux hommes s'avisaient de jouer tout leur bien, quel serait l'effet de cette convention? L'un ne ferait que doubler sa fortune, et l'autre réduirait la sienne à zéro; or, quelle proportion y a-t-il entre la perte et le gain? La même qu'entre tout et rien; le gain de l'un n'est qu'égal à une somme assez modique, et la perte de l'autre est numériquement infinie, et moralement si grande, que le travail de toute sa vie ne suffirait peut-être pas pour regagner son bien.

« La perte est donc infiniment plus grande que le gain lorsqu'on joue tout son bien; elle est plus grande d'une sixième partie lorsqu'on joue la moitié de son bien; elle est plus grande d'une vingtième partie lorsque l'on joue le quart de son bien; en un mot, quelque petite portion de sa fortune qu'on hasarde au jeu, il y a toujours plus de perte que de gain; aussi, le pacte du jeu est un contrat vicieux et qui tend à la ruine des deux contractants. Vérité nouvelle, mais très-utile, et que je désire qui soit connue de tous ceux qui, par cupidité ou par oisiveté, passent leur vie à tenter le hasard.

« On a souvent demandé pourquoi l'on est plus sensible à la perte qu'au gain ; on ne pouvait faire à cette question une réponse pleinement satisfaisante, tant qu'on ne s'est pas douté de la vérité que je viens de présenter ; maintenant la réponse est aisée : on est plus sensible à la perte qu'au gain, parce qu'en effet, en les supposant numériquement égaux, la perte est néanmoins toujours et nécessairement plus grande que le gain ; le sentiment n'est en général qu'un raisonnement implicite, moins clair, mais souvent plus fin, et toujours plus sûr que le produit direct de la raison. On sentait bien que le gain ne nous faisait pas autant de plaisir que la perte nous causait de peine ; ce sentiment n'est que le résultat implicite du raisonnement que je viens de présenter. »

Ces considérations seraient bien propres à modérer la cupidité des joueurs, s'ils consultaient le moins du monde la raison, avant de tenter la fortune.

Il est des parties plus désastreuses que l'on entreprend quelquefois avec la plus coupable témérité ; ce sont celles que l'on joue sur des champs de bataille. Tristes conditions que celles qui exigent, pour enjeu, la prospérité des nations et le sang des hommes ; où le gagnant est celui qui réussit le mieux à détériorer la part qu'il convoite, sans qu'il puisse prévoir l'étendue des sacrifices qu'il devra s'imposer pour l'obtenir !

10. Comment il faut envisager le calcul des probabilités. De l'accord entre la théorie et l'expérience.

Nous allons nous occuper d'une question importante, celle de savoir le degré de confiance qu'on peut attacher à un résultat donné par la théorie des probabilités. On se tromperait étrangement, si l'on croyait que l'expérience vient toujours justifier les prévisions du calcul. Cet accord n'est en général qu'accidentel, mais on peut faire que la discordance devienne aussi faible qu'on le désire, eu égard à la nature des recherches dont on s'occupe.

Quand on ne fait qu'une seule épreuve, il ne saurait jamais y avoir accord entre le résultat du calcul et celui de l'expérience. Avant l'événement, il n'y a que des probabilités pour ou contre son arrivée ; et, quand l'événement s'est produit, les probabilités sont remplacées par la certitude. Ainsi, avant de prendre une carte dans un jeu ordinaire, j'ai $\frac{12}{32}$ pour probabilité de prendre une figure ; et j'ai contre moi la probabilité $\frac{20}{32}$; cependant, quand la carte est tournée, ma position se trouve entièrement changée ; mes doutes ont fait place à la certitude ; et, si j'ai parié pour l'événement, je sais que j'ai gagné ou perdu, quelle que soit la probabilité que j'avais en ma faveur.

Quand on fait un grand nombre d'épreuves, l'accord peut s'établir entre les résultats du calcul et ceux de l'expérience ; mais cet accord n'est pas nécessaire. Jacques Bernoulli a fait voir qu'*en multipliant convenablement le nombre des épreuves, on peut atteindre à une probabilité aussi voisine de la certitude qu'on voudra, que la différence entre les résultats du calcul et ceux de l'expérience sera resserrée dans des limites aussi étroites qu'on voudra.*

C'est ce que savent fort bien ceux qui établissent des loteries ou des maisons de jeux de hasard. Le grand nombre de joueurs qui viennent y exposer leur argent, laissent pour les entrepreneurs, malgré les fluctuations apparentes du sort, un bénéfice qu'on peut estimer d'avance, et qui est tout aussi fixe que les revenus du trésor. Ainsi, les *Recherches statistiques sur Paris* nous apprennent que, de 1816 à 1820 inclusivement, la loterie de Paris a mis annuellement en circulation une somme d'environ 25 millions de francs, sur lesquels le trésor recevait un peu plus du quart.

Le gouvernement belge, en instituant des caisses de pensions pour les veuves et les orphelins des fonctionnaires publics, a malheureusement perdu de vue ce principe important, que les prévisions du calcul ne peuvent marcher d'accord avec l'expérience si l'on n'opère sur de grands nombres. En formant des caisses séparées pour chaque branche du service public, et en s'imposant la condition de ne jamais leur venir en aide, il a multiplié les chances des fluctuations auxquelles les caisses sont

nécessairement assujetties. Il devient très-peu probable que les espérances d'un père pourront se réaliser, au sujet de la pension de sa veuve ou de ses orphelins, quand une association ne compte pas même une centaine de membres, comme il arrive pour le haut enseignement. La suite naturelle d'un pareil état de choses est que certaines caisses devront prospérer pendant que d'autres seront en souffrance ; cette inégalité sera nécessairement un grand mal, puisqu'elle atteindra des hommes que l'on devait considérer comme les membres d'une même famille.

C'est un principe très-simple et très-utile dans la pratique, que la *précision des résultats croît comme la racine carrée du nombre des observations*. Ainsi, toutes choses égales d'ailleurs, les degrés de précision sont comme les nombres 1, 2, 3, 4, etc., quand les observations sont comme les nombres, 1, 4, 9, 16, etc.

Nous avons été curieux de soumettre ce principe à l'expérience en faisant jeter, dans une urne, vingt boules blanches et un égal nombre de boules noires, de sorte que la probabilité était la même, et égale à $\frac{1}{2}$, pour prendre soit une boule blanche, soit une boule noire. Il semblait donc qu'après un certain nombre de tirages, le nombre des boules blanches sorties dût être égal au nombre des boules noires ; ce n'est cependant pas ce qui est arrivé, comme on pourra le voir dans le petit tableau suivant, qui indique les résultats successivement obtenus après 4, 16, 64 tirages, et plus. Il est bon de prévenir qu'après chaque tirage, la boule tirée était remise dans l'urne, pour que toutes les circonstances de l'expérience restassent les mêmes.

NOMBRE des BOULES TIRÉES.	DEGRÉ de PRÉCISION.	NOMBRE DE BOULES		RAPPORT des nombres précédents.
		BLANCHES.	NOIRES.	
4	2	1	3	0.33
16	4	8	8	1.00
64	8	28	36	0.78
256	16	125	131	0.95
1024	32	528	496	1.06
4096	64	2066	2030	1.02

La première colonne indique les nombres des boules tirées, et la seconde, les racines carrées de ces mêmes nombres. D'après le principe énoncé plus haut, ces racines expriment les degrés relatifs de la précision des résultats. Dans les deux colonnes suivantes, se trouve l'indication des boules blanches et des boules noires qui sont sorties de l'urne; ces nombres devraient être égaux entre eux, si la théorie et l'expérience marchaient rigoureusement d'accord. La dernière colonne nous fait connaître le rapport des boules blanches aux boules noires tirées; ce rapport devrait être 1, mais un pareil résultat n'a été obtenu qu'une fois et après 16 tirages seulement. Cet accord n'était qu'accidentel, tandis que nous remarquons, au milieu des oscillations des nombres, qu'il y a bien évidemment une tendance à se rapprocher de l'unité par la multiplication des tirages.

Buffon, dans son *Essai d'arithmétique morale,* cite des épreuves semblables faites par un enfant et qui ont produit des résultats analogues.

DEUXIÈME PARTIE.

PROBABILITÉS QUAND LES CHANCES SONT INCONNUES.

---

1. Du calcul quand le nombre des chances est inconnu.

Il arrive en général, dans les sciences d'observation, que le nombre et la nature des chances d'un événement se trouvent complétement inconnus, et qu'on ne parvient à les déterminer approximativement que par des expériences bien conduites et discutées avec discernement.

Supposons, par exemple, qu'on cherche à connaître si la naissance d'un garçon est plus probable que celle d'une fille. Pour résoudre cette question, on a recours à l'expérience; et l'on cherche, par une énumération faite avec soin, dans quel rapport ont été, pendant un certain temps, les naissances masculines et les naissances féminines. La théorie enseigne que le rapport obtenu ainsi peut être pris sensiblement pour celui que l'on cherche. En général, *quand on a observé deux espèces d'événe-*

ments, la probabilité qu'un de ces événements se reproduira encore une fois, est une fraction qui a pour numérateur le nombre de fois que l'événement dont il est question a été observé plus 1; et pour dénominateur, le nombre total des observations, plus 2.

En Belgique, on a compté annuellement environ 70,000 naissances masculines sur 65,800 naissances féminines. La probabilité d'une nouvelle naissance masculine serait donc $\frac{70001}{135802}$; et celle d'une naissance féminine $\frac{65801}{135802}$. Quand le nombre des observations est considérable, les résultats sont à peu près les mêmes que ceux qu'on obtiendrait en considérant les chances favorables et les chances défavorables comme étant numériquement dans le même rapport que les événements observés. Ainsi, les probabilités précédentes seraient représentées par les nombres $\frac{70000}{135800}$ et $\frac{65800}{135800}$; ou plus simplement par les fractions $\frac{17}{33}$ et $\frac{16}{33}$.

Tout se passe comme si l'on nous présentait une urne contenant un nombre infini de boules dont on ne ferait connaître ni le nombre ni les couleurs. On nous permet seulement d'en tirer autant que nous voulons, pour nous éclairer par l'expérience, et, d'après le nombre de boules sorties, nous jugeons de ce que contient l'urne. Les choses se trouvent ramenées ainsi au cas le plus simple, celui où les chances sont entièrement déterminées.

Sur 146 comètes dont les mouvements étaient calculés, en 1846, il s'en trouvait 75 dont le mouvement était direct et 71 pour lesquels il était rétrograde. On pouvait déduire de ces observations que la probabilité d'un mouvement direct, pour la première comète à découvrir, était à peu près $\frac{75}{146}$; et la probabilité d'un mouvement contraire $\frac{71}{146}$.

Quelquefois, à la suite d'un nombre donné d'épreuves, il se trouve que l'on n'a observé qu'une seule espèce d'événements; comme si l'on tirait des boules d'une urne et que toutes fussent de la même couleur. La théorie, dans ce cas, donne encore la même règle de calcul, et montre que *la probabilité que cet événement se reproduira encore la fois suivante, est égale au nombre d'observations augmenté de 1, divisé par le même nombre augmenté de 2 unités.*

On a découvert jusqu'à présent 30 planètes qui, toutes, marchent dans le même sens autour du soleil ; on demande quelle est la probabilité que, si l'on découvre une nouvelle planète, elle marchera dans le même sens que les autres. D'après le principe énoncé précédemment, la probabilité est $\frac{31}{32}$, et la probabilité contraire $\frac{1}{33}$.

On voit que le retour d'un événement devient d'autant plus probable qu'il a été observé plus de fois de suite. Cette manière de juger a cependant soulevé des difficultés. On s'expose, en effet, surtout après un petit nombre d'épreuves, à prendre pour la règle ce qui n'est que l'exception. Celui qui viendrait dans nos régions et qui aurait compté consécutivement 20 jours de pluie, pourrait croire que cet état de choses va continuer ; tandis que connaissant la nature du climat, il saurait que la continuation des pluies constituerait une véritable anomalie.

La difficulté consiste donc à savoir de quelle nature sont les causes influentes, et combien d'observations sont nécessaires pour les mettre en évidence. Nous avons déjà vu, dans le chapitre précédent, qu'en procédant par voie d'expérience, l'erreur devient d'autant moindre que les observations ont été plus nombreuses et que *la précision croît comme la racine carrée du nombre des observations.*

L'expérience ne nous fait connaître la nature des chances que sous de certaines restrictions ; ainsi, après avoir observé un même événement plusieurs fois de suite, on a des probabilités plus ou moins fortes de croire au retour de cet événement : on sent qu'il existe une cause qui facilite sa reproduction. La théorie, dans ce cas, offre encore un moyen très-simple de calculer la probabilité que cette cause existe effectivement : *la probabilité est une fraction qui a pour dénominateur* le nombre 2 *multiplié autant de fois par lui-même que l'événement a été observé de fois consécutives; et pour numérateur, le même produit moins* 1.

Quelle est, par exemple, la probabilité qu'il existe, pour les planètes, une plus grande facilité de se mouvoir autour du soleil dans une direction plutôt que dans une autre opposée? On a observé 30 planètes qui se meuvent, toutes, dans le même sens,

c'est-à-dire d'occident en orient ; la probabilité de se mouvoir dans ce sens est $\frac{2^{31}-1}{2^{31}}$ ou bien $\frac{2\,147\,483\,647}{2\,147\,483\,648}$. On a donc une immense probabilité en faveur de l'hypothèse qu'il existe une cause qui facilite le mouvement uniforme de translation des planètes autour du soleil.

On peut aussi calculer la probabilité qu'un événement observé un nombre quelconque de fois de suite, se reproduira encore plusieurs fois. *La probabilité vaut une fraction qui a, pour numérateur, le nombre d'observations faites plus* 1 ; *et pour dénominateur, ce même nombre plus* 1 *et plus encore le nombre de fois que l'événement doit se reproduire.* Par exemple, quelle est la probabilité, après avoir tiré consécutivement 30 boules blanches d'une urne, que, si l'on en tire encore trois, elles seront blanches également? Il faut diviser 30 plus 1 ou 31, par 30 plus 1 et plus 3 ou 34, et la probabilité demandée sera $\frac{31}{34}$.

Cette même fraction $\frac{31}{34}$ représente la probabilité que si l'on découvre encore trois planètes, elles marcheront dans le même sens que les 30 planètes que nous connaissons déjà. Dans l'ignorance de ce que contient l'urne ou de ce que l'avenir réserve à nos découvertes, nous supposons les conditions identiques des deux côtés.

On voit du reste que la probabilité irait continuellement en décroissant, à mesure que le nombre des événements attendus serait supposé plus grand.

Les principes précédents sont très-utiles dans les sciences d'observation. On a fait, par exemple, quatre expériences qui se sont accordées à donner le même résultat ; et l'on en conclut que la probabilité qu'une cinquième expérience donnera encore un résultat conforme aux précédents est $\frac{5}{6}$. Quant à la probabilité qu'il existe un motif qui favorise le retour des résultats observés, elle est $\frac{31}{32}$.

Quand plusieurs espèces d'événements se produisent par l'expérience, les calculs pour déterminer les probabilités respectives des retours de chacun d'eux deviennent assez compliqués. Heureusement on trouve que les résultats sont à peu près les mêmes que ceux qu'on obtiendrait en considérant les chances favorables et les chances défavorables comme étant numériquement dans le

même rapport que les événements observés ; c'est un moyen de simplification dont nous nous sommes déjà servi précédemment. Ainsi, on a tiré d'une urne 57 boules blanches, 115 boules noires et 30 boules rouges ; nous admettrons que l'urne contient des boules blanches, noires et rouges, réparties proportionnellement aux nombres précédents et qui sortiraient proportionnellement à ces mêmes nombres, si l'on continuait les tirages.

Plus on a d'observations, et moins il y a d'erreur à calculer de cette dernière manière qui suppose qu'on connaît le nombre total des chances, et le nombre de chances favorables à chaque espèce d'événements.

2. Des moyennes et des limites en général.

Quand on se met en présence de la nature, et qu'on cherche à l'interroger, ce qui frappe au premier abord c'est la variété infinie qu'on remarque dans les moindres phénomènes. Quelles que soient les limites dans lesquelles on concentre son attention, on trouve une diversité qui étonne autant qu'elle embarrasse. Les simples appréciations laissent un vague, incompatible avec la précision qu'exigent les sciences. Un même objet, mesuré ou pesé plusieurs fois de suite, présente, malgré toutes les précautions que l'on prend, des résultats presque toujours dissemblables. Nos idées cependant ont besoin de se fixer et de s'arrêter sur un nombre précis, sur une moyenne, qui donne le résultat des observations aussi dégagé que possible de tout ce qu'il a eu d'accidentel.

La considération des moyennes nous est si familière, que nous l'employons, en quelque sorte, à notre insu. Ainsi, nous ne faisons pas difficulté d'attribuer au soleil une grandeur apparente déterminée, bien que cet astre ne soit pas vu rigoureusement sous le même angle pendant deux jours, et l'on peut dire pendant deux instants consécutifs. C'est ainsi que nous disons encore quelle est la température des étés dans un lieu donné, bien que cette température varie à chaque instant.

La théorie des moyennes sert de base à toutes les sciences d'observation ; elle est si simple et si naturelle, qu'on n'apprécie peut-être pas assez le pas immense qu'elle a fait franchir à l'esprit humain. Nous ignorons à qui elle est due ; c'est ainsi que presque toutes les grandes découvertes se sont établies, sans qu'on en ait connu les inventeurs. Tout ce que nous apprend à cet égard l'histoire des sciences, c'est qu'un peuple se servait de la découverte avant les autres : il en est ainsi pour la numération, l'écriture et l'imprimerie même.

Remarquons dès à présent qu'en se préoccupant de l'idée de la moyenne pour des quantités susceptibles de varier, on a peut-être trop perdu de vue les *limites* entre lesquelles s'opèrent les variations. Partout où l'on peut dire *plus* ou *moins*, on a nécessairement trois choses à considérer, un état moyen et deux limites.

Sans recourir à la science, l'habitude nous donne une appréciation vague de la moyenne et des limites des variations qui appartiennent à chaque élément variable que nous présente la nature ou l'état social ; c'est d'après cette appréciation que nous sommes guidés dans nos raisonnements. Mais il convient aux progrès des lumières de substituer des idées précises à des notions vagues.

Il serait assez curieux de rechercher à quelle époque on a commencé à faire un usage raisonné des moyennes. Il en existait assurément une idée obscure dans l'antiquité, car cette idée est inhérente à notre nature et sert de base à presque tous nos jugements ; mais elle ne s'est produite explicitement que très-tard, et il serait difficile de fixer, chez les modernes, l'époque de son introduction, celle où l'on a établi en principe que *la moyenne d'une série d'observations s'obtient en divisant la somme des valeurs observées par le nombre des observations.* La considération des limites, en tant qu'elles complètent l'idée de la moyenne, n'a pu prendre quelque consistance que par l'application du calcul des probabilités à l'étude des phénomènes naturels. L'établissement et le développement de la théorie des moyennes formeraient un des chapitres les plus intéressants de l'histoire de l'esprit humain ; c'est Archimède, ce génie remarquable à tant

d'égards, qui semble avoir, dans l'antiquité, le mieux apprécié l'importance des moyennes; il en a fait un usage admirable dans la recherche du *centre de gravité,* dont il est l'inventeur. Il a substitué la considération d'un point unique à celle d'un grand nombre de points matériels; et cette idée ingénieuse, qui a été si bien fécondée depuis, lui mériterait, à elle seule, la reconnaissance des hommes.

Aristote, l'un des plus grands observateurs de l'antiquité, avait également aperçu les propriétés des moyennes; il en faisait l'application aux sciences morales: selon lui, les vertus consistent dans un juste état d'équilibre; et toutes nos qualités, dans leurs plus grands écarts de la moyenne, ne produisent que des vices. Cette doctrine avait passé de l'école des philosophes chez les poëtes : Horace, parmi les Romains, en a été l'un des plus élégants et des plus aimables interprètes.

Mais combien il y a loin de ces premiers aperçus aux savantes théories que nous possédons aujourd'hui! Et cependant, il nous reste bien du chemin à faire encore, pour que les travaux de l'analyse moderne produisent tous leurs fruits. La plupart des observateurs, les meilleurs même, ne connaissent que très-vaguement, je ne dirai pas la théorie analytique des probabilités, mais la partie de cette théorie qui concerne l'appréciation des moyennes.

Quand on calcule une moyenne, on peut avoir en vue deux choses bien différentes : on peut chercher un nombre qui existe véritablement, ou bien un nombre qui donne l'idée le plus rapprochée possible de plusieurs quantités différentes, exprimant des choses homogènes, mais de grandeur inégale. Expliquons notre pensée.

En mesurant la hauteur d'un édifice vingt fois de suite, nous ne trouverons peut-être pas deux fois identiquement la même valeur : cependant, on conçoit que l'édifice a une hauteur déterminée, et si nous ne l'avons pas estimée exactement par chacune des opérations faites pour la reconnaître, c'est que ces opérations comportent quelque incertitude. On se borne alors à prendre la moyenne de toutes les déterminations pour la véritable hauteur cherchée. Les limites plus ou moins larges dans

lesquelles se trouvent renfermées les mesures obtenues dépendent du plus ou moins d'adresse et de l'exactitude des instruments dont il est fait usage.

Nous pouvons encore employer le calcul de la moyenne dans un autre sens. On voudrait donner une idée de la hauteur des maisons qui se trouvent dans une rue déterminée. Il faudrait mesurer la hauteur de chacune d'elles, faire la somme des hauteurs observées, et diviser le résultat par le nombre des maisons. La valeur moyenne ne représentera la grandeur d'aucune d'elles en particulier, mais elle aidera à faire connaître leur hauteur en général; et les limites plus ou moins larges dans lesquelles se trouveront renfermées toutes les mesures obtenues, dépendront de la diversité des maisons.

Il existe entre ces deux exemples une différence notable qu'on n'aura peut-être pas saisie au premier abord, mais qui n'en est pas moins d'une grande importance. Dans le premier, la moyenne représentait une chose existant réellement; dans le second, elle donnait, sous la forme d'un nombre abstrait, une idée générale de plusieurs choses essentiellement différentes, quoique homogènes.

D'une autre part, et ce point est capital, les nombres qui ont concouru à former la moyenne dans l'un et l'autre exemple, se présentent de manières bien différentes. Dans le second exemple, ils ne se trouvent liés entre eux par aucune loi de continuité; tandis que, dans le premier, comme nous aurons occasion de le voir bientôt, les déterminations des hauteurs, bien que fautives, se groupent des deux côtés de la moyenne avec une régularité telle qu'on pourrait assigner d'avance leurs valeurs, si l'on donnait les limites entre lesquelles elles se trouvent comprises.

Cette distinction est si importante, que j'emploierai des mots différents pour mieux l'établir; je réserverai le nom de *moyenne* pour le premier cas, et j'adopterai celui de *moyenne arithmétique* pour le second, afin de faire sentir qu'il s'agit ici d'une simple opération de calcul entre des quantités qui n'ont pas de relations essentielles. Ces relations ne s'aperçoivent pas toujours; mais parfois on les reconnait quand on ne s'attendait pas à en trouver, et la moyenne arithmétique devient alors une véritable moyenne.

Quelquefois la moyenne arithmétique se calcule d'après les éléments les plus divers, sans qu'on puisse en conclure que l'idée générale qu'elle doit représenter soit sans utilité ou sans importance. Je citerai pour exemple la *vie moyenne*. On sait que le statisticien, quand il veut la calculer pour un pays donné, suppose que tous les individus nés en même temps dans ce pays mettent en commun les années, mois et jours qu'ils ont à vivre, et en font un partage égal entre eux, de manière à ce que l'un ne vive pas plus longtemps que l'autre. Ainsi, sur 100,000 individus, 9,600 ne vivent qu'un mois, 2,460 vivent deux mois, 1,760 vivent trois mois, et ainsi de suite[1]. On fait la somme générale des durées de la vie de chacun de ces individus, et l'on divise par 100,000. Le résultat de l'opération donne la vie moyenne : elle est d'environ 32 ans pour la Belgique, ainsi que pour la France; elle s'élève, dit-on, à 33 ans pour l'Angleterre.

On a remarqué que, par suite des progrès de la civilisation et des sciences , la vie moyenne est devenue successivement plus longue chez quelques peuples, et l'on s'en est félicité, surtout par l'idée que l'allongement de la vie s'est également reporté sur tous les individus : c'est en effet ce qui se produit le plus généralement.

On peut acquérir de la manière suivante une connaissance assez exacte de la précision d'un résultat moyen. On divise en deux parties l'ensemble des valeurs observées dont le nombre est supposé très-grand, et l'on prend, pour chacune de ces parties, la valeur du résultat moyen ; si ces deux valeurs diffèrent extrêmement peu l'une de l'autre, on est fondé à regarder chacune d'elles comme très-précise. « Rien n'est plus propre que ce genre d'épreuves, dit le baron Fourier, à mettre en évidence l'exactitude des résultats, et il est presque inutile de présenter au lecteur des conséquences qui ne sont pas vérifiées par des comparaisons des valeurs moyennes. » Ainsi, pour reconnaître quelles espèces de boules contient une urne, il faut répéter un très-grand nombre d'épreuves, dont chacune consiste à extraire

[1] Voy. les tables de mortalité de Belgique dans les *Annuaires de l'Observatoire de Bruxelles*.

une boule de l'urne, et à l'y replacer après avoir marqué sa couleur; on divise alors fortuitement la série des observations en deux ou plusieurs parties, et l'on compare les valeurs moyennes que l'on déduit séparément de chacune de ces parties.

L'emploi de cette règle suppose évidemment que la composition de l'urne ne change pas pendant toute la durée des expériences.

On pourrait encore appliquer la règle au cas où des changements surviendraient dans la nature des causes, et l'on peut même connaître ainsi l'effet de ces changements; mais il est nécessaire, dans ce cas, de considérer séparément les intervalles dans lesquels la cause demeure constante, et de multiplier les observations relatives à chacun de ces intervalles. Les sources les plus communes de l'erreur et de l'incertitude des conséquences que plusieurs écrivains déduisent des recherches scientifiques, sont : 1° L'inexactitude des observations primitives recueillies par des moyens très-divers et non comparables; 2° le trop petit nombre des observations, ce qui ne permet point de les diviser en séries et de former séparément le résultat de chaque série; 3° l'altération ou progressive ou irrégulière que les causes ont subies pendant la durée des observations.

3. Des erreurs des observations. Loi des causes accidentelles. Loi des moindres carrés. Loi des grands nombres.

Supposons qu'on ait mesuré plusieurs fois de suite un même objet, la hauteur d'une maison par exemple : malgré tous les soins donnés à cette opération, il arrivera que les différents résultats ne seront pas identiquement les mêmes. Nous avons déjà vu qu'en pareil cas, on prend la moyenne de tous les nombres observés pour la hauteur cherchée.

En adoptant ce dernier nombre, on nomme *erreurs* d'observation les différences qui se trouvent entre lui et chacune des mesures particulières; ces erreurs seront positives ou négatives,

et, en général, dissemblables entre elles. Plus on aura opéré avec soin, plus elles seront petites.

Il ne faut pas croire cependant que les erreurs, bien qu'elles proviennent de petites maladresses ou de mille autres causes accidentelles, se présenteront sans ordre, et, comme on dit vulgairement, au hasard : nous verrons bientôt le contraire. Remarquons pour le moment que les grandeurs de ces erreurs, ou de ces écarts de la moyenne, peuvent déjà donner une idée de l'adresse de celui qui a observé. Toutes choses égales, elles seront moindres pour tel observateur, plus grandes pour tel autre.

Il faut cependant établir une distinction : quand on prend les erreurs des observations, pour se faire une idée de la précision du résultat, ce n'est pas la moyenne des erreurs que l'on consulte, mais la moyenne des carrés des erreurs dont on extrait la racine carrée : c'est ce qu'on nomme l'*erreur moyenne*. Ainsi, l'on a mesuré cinq fois la hauteur d'une maison, et l'on a trouvé que la hauteur moyenne est de 20 mètres : les erreurs des observations ont été successivement

$$+12^{mm}, +7^{mm}, -6^{mm}, -18^{mm}, +5^{mm}.$$

On fera les carrés de ces nombres et on divisera leur somme par cinq (nombre des observations). On aura ainsi 1156, dont la racine carrée $10^{mm},75$ est l'erreur moyenne.

On peut voir que, par cette manière de calculer, les erreurs un peu fortes ont une importance très-grande. La seule erreur —18, dont le carré est 324, a plus d'importance que les quatre autres erreurs réunies, pour lesquelles la somme des carrés n'est que 254.

Pour avoir ce que l'on nomme, dans la théorie des probabilités, l'*erreur probable*, il faut multiplier l'erreur moyenne par un nombre qui s'éloigne très-peu de $\frac{2}{3}$. Dans notre exemple, l'erreur probable serait donc $7^{mm},17$: ce qui veut dire que si l'on recommençait la mesure, il y aurait 1 contre 1 à parier que l'erreur, soit en plus, soit en moins, ne dépasserait pas $7^{mm},17$. C'est par la comparaison des erreurs probables qu'on jugerait de la précision respective de deux ou de plusieurs séries d'observations.

Remarquons que $7^{mm},17$ est l'erreur probable d'une *observation isolée;* si l'on voulait avoir l'erreur probable du *résultat* 20 mètres, c'est-à-dire si l'on voulait savoir de combien ce résultat peut varier encore par des mesures ultérieures, il faudrait diviser le nombre obtenu $7^{mm},17$ par la racine carrée du nombre des observations qui ont concouru à le produire; il faudrait donc le diviser par la racine carrée de 5 : on aurait ainsi, pour erreur probable du résultat, $\frac{7,17}{2,24}$ ou $3^{mm},20$. Il y aurait donc 1 contre 1 à parier que la hauteur de 20 mètres ne diffère pas de $3^{mm},20$ de la hauteur que l'on cherche à déterminer.

La considération de l'erreur probable est d'une grande importance dans les sciences d'observation; elle nous permet de reconnaître le degré de précision qu'on est parvenu à atteindre.

En faisant une série d'observations, quelquefois on n'a en vue que de déterminer une seule inconnue, comme dans l'exemple qui a précédé; quelquefois on se propose de déterminer plusieurs inconnues à la fois, et alors la solution du problème offre plus de difficultés. Supposons, par exemple, qu'on ait à résoudre deux équations du premier degré à deux inconnues; les premiers principes de l'algèbre font connaître que le problème est *déterminé* et que les deux inconnues n'admettent chacune qu'une seule valeur. Si l'on ajoutait une troisième équation à deux inconnues, le problème serait plus que déterminé; car en combinant cette troisième équation avec l'une et l'autre des deux précédentes, on aurait deux nouveaux systèmes de deux équations qu'on pourrait résoudre séparément, et par suite l'une et l'autre inconnue aurait en général trois valeurs différentes; laquelle faudrait-il prendre? La théorie des probabilités montre qu'il faut prendre la valeur de manière à ce que la somme des carrés des erreurs forme un minimum, et elle enseigne en outre à faire directement le calcul sur toutes les équations prises en même temps; c'est en quoi consiste la *méthode des moindres carrés.* Les principes de ces calculs ne peuvent trouver place dans un traité élémentaire.

Voyons maintenant en quoi consiste la loi des *causes acci-*

dentelles. Nous reprendrons l'exemple cité plus haut ; seulement au lieu de cinq mesures de la hauteur du bâtiment, nous supposerons que l'on en ait fait mille, et nous classerons toutes les erreurs d'observation par ordre de grandeur ; par exemple, en groupant ensemble celles qui surpassent la moyenne de 0 à 4 millimètres, de 4 à 8 millimètres, de 8 à 12 millimètres, et ainsi de suite : nous ferons un classement analogue pour les erreurs qui tombent au-dessous de la moyenne. Cela posé, nous remarquerons les particularités suivantes, s'il est vrai que les erreurs des mesures ont eu lieu sous l'influence de causes purement accidentelles, et sans qu'il y ait de tendance à prendre des mesures ou trop grandes ou trop petites :

1° Les groupes des erreurs positives et ceux des erreurs négatives seront également nombreux et sensiblement les mêmes des deux côtés de la moyenne ;

2° La valeur numérique de chaque groupe diminue à mesure qu'on s'éloigne de la moyenne ;

3° Ces valeurs numériques sont calculables *à priori* et dépendent d'une formule qui exprime la *loi de possibilité* ou *des causes accidentelles*.

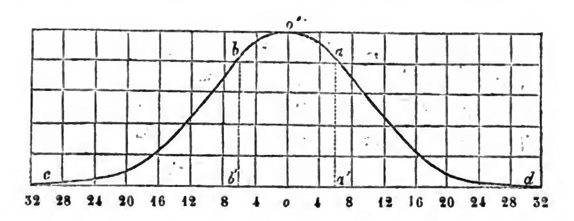
Le tableau suivant présente un exemple de la manière dont procéderaient nos erreurs de mesure, en supposant huit groupes au-dessus de la moyenne et tout autant au-dessous de la moyenne, ce qui porte la limite des erreurs à 32 millimètres. Nous n'écrirons que les groupes positifs, puisqu'au signe près, les groupes négatifs seraient exactement les mêmes.

	Grandeur des erreurs des observations.	Nombre d'erreurs contenues dans chaque groupe.
1er groupe,	de 0 à 4 millim.	171
2e —	de 4 à 8 —	141
3e —	de 8 à 12 —	96
4e —	de 12 à 16 —	53
5e —	de 16 à 20 —	26
6e —	de 20 à 24 —	9
7e —	de 24 à 28 —	3
8e —	de 28 à 32 —	1

Sur 500 erreurs positives, il y en aurait donc 171 s'élevant au-dessus de la moyenne de 0 à 4 millimètres ; il y en aurait 141 de 4 à 8 millimètres, et ainsi de suite ; il en serait de même pour les groupes qui tombent au-dessous de la moyenne.

L'erreur probable tomberait entre 4 et 8 millimètres. On voit en effet que sur 500 erreurs positives, il s'en trouve 171 de 0 à 4 millimètres et 312 de 0 à 8 millimètres ; la moyenne de ces deux nombres est 241, à peu près moitié de 500. Il y aurait donc à peu près autant d'erreurs positives excédant 6 millimètres que d'autres tombant au-dessous de ce nombre, et par suite, on peut parier 1 contre 1 que l'erreur n'excédera pas 6 millimètres ; ce dernier nombre est par conséquent l'erreur probable : on le calcule plus exactement d'une manière directe, comme il a été indiqué au commencement de ce chapitre.

On peut rendre la loi des causes accidentelles plus sensible par la figure ci-jointe, qui se rapporte à l'exemple précédent.



Les chiffres, placés sur la ligne horizontale *cd*, indiquent, par leur distance au point *o*, la grandeur respective des erreurs positives et négatives ; et les perpendiculaires qui leur correspondent figurent, par leur longueur jusqu'à la courbe, le nombre des erreurs. Ainsi, la perpendiculaire *aa'* indique, par sa longueur, combien il y a comparativement d'erreurs positives de 6 millimètres ; et toute la surface *aa'oo'*, entre cette perpendiculaire et la moyenne *oo'*, représente la somme des erreurs de 0 à 6 millimètres. Les perpendiculaires *bb'* et *aa'* servent de limites à l'erreur probable, et la portion *bb'a'a* de la surface qu'elles comprennent entre elles, est équivalente à celles *aa'd*

et $bb'c$ placées extérieurement et représentant la somme des erreurs positives et négatives plus grandes que 6 millimètres.

Cette courbe suppose que les causes accidentelles d'erreur, en plus et en moins, sont parfaitement égales et indépendantes. Il arrive parfois que les causes accidentelles qui tendent à exagérer la quantité cherchée n'ont pas la même probabilité que celles qui tendent à l'amoindrir, et par exemple que les erreurs en plus ont une tendance à être plus grandes que les erreurs en moins. La courbe alors perd sa symétrie, et son ordonnée maximum oo' quitte sa position médiane pour se rapprocher de l'une ou de l'autre extrémité c ou d [1]; il arrive aussi parfois que la quantité qu'on mesure n'est pas invariable; par exemple, au lieu d'avoir à mesurer la hauteur d'un édifice, on peut avoir à mesurer la hauteur d'un homme, laquelle varie, soit par lassitude, soit par d'autres causes, soit pendant le cours des observations. Ces petites variations peuvent alors être regardées comme les effets de causes accidentelles ajoutées aux autres causes accidentelles, qui déjà influaient sur le résultat final.

[1] Le calcul rend fort bien compte de ces circonstances : la courbe *cbad* figure, par ses ordonnées, la succession des différents termes du binôme

$$(a+b)^m = a^m + ma^{m-1}b + \frac{m(m-1)}{1.\ 2.}a^{m-2}b^2 + \text{etc.};$$

et les termes du second membre, comme nous l'avons vu page 26, sont les probabilités de tous les événements qui peuvent se présenter et ici de toutes les erreurs possibles. Ainsi a^m représente la probabilité que toutes les erreurs en plus concourent pour rendre l'observation fautive; $ma^{m-1}b$ représente la probabilité que toutes les erreurs en plus, moins une, concourent; $\frac{m(m-1)}{1.\ 2.}a^{m-2}b$ représente la probabilité que toutes les erreurs en plus, moins deux, concourent; et ainsi de suite.

Quand les erreurs en plus ont mêmes chances que les erreurs en moins, on a $a=b$, et le développement du binôme est symétrique : le plus grand terme, comme on sait, se trouve au milieu du développement ; c'est-à-dire que la plus grande probabilité est pour que les causes d'erreur en plus soient compensées par un égal nombre d'erreurs en moins. A partir de ce terme *maximum*, les autres termes vont en diminuant vers les deux extrémités du développement, comme l'indique la courbe.

Quand a n'est pas égal à b, le terme le plus grand du développement est celui dans lequel les exposants de a et b sont proportionnels aux valeurs de ces mêmes quantités. Voyez les *Lettres sur la théorie des probabilités appliquée aux sciences morales et politiques*, où ce sujet est traité avec beaucoup de développements.

La question peut se présenter sous une forme plus générale encore : supposons qu'on demande quelle est la taille moyenne des Brabançons, on trouvera, ici, outre toutes les causes accidentelles d'erreur que nous venons d'énoncer, quand il s'agit d'un seul individu, les variations que l'on rencontre en passant d'un individu à l'autre ; or, les mêmes principes du calcul des probabilités sont encore applicables, seulement les expériences doivent être très-multipliées, pour détruire les effets des causes accidentelles qui sont devenues plus nombreuses. C'est par ce motif que M. Poisson a nommé *loi des grands nombres* l'extension du principe de Bernoulli qui se rapporte à la mesure d'un objet unique.

4. Des causes constantes, variables et accidentelles.

Il n'appartient qu'à des esprits supérieurs d'apercevoir, au milieu d'une infinité de causes qui donnent naissance à un événement, celles dont il faut tenir compte, et celles que l'on peut négliger.

On peut partager ces causes en trois classes principales :

Les causes constantes ;

Les causes variables ;

Les causes accidentelles.

Les causes *constantes* sont celles qui agissent, d'une manière continue, avec la même intensité et dans le même sens.

Les causes *variables* agissent, d'une manière continue, avec des énergies et des tendances qui changent, soit d'après des lois déterminées, soit sans aucune loi apparente. Parmi les causes variables, il importe surtout de remarquer celles qui ont un caractère de *périodicité*, comme les saisons.

Les causes *accidentelles* ne se manifestent que fortuitement, et agissent indifféremment dans l'un ou l'autre sens.

Si l'on apprécie les causes sous le rapport mathématique, la cause constante a pour elle un certain nombre *déterminé* de chances, une probabilité fixe.

La cause variable a pour elle un nombre *variable* de chances, et par suite une probabilité qui peut osciller dans des limites plus ou moins larges.

La cause accidentelle n'a pas, à proprement parler, de chances en sa faveur; mais elle influe sur l'ordre de succession des événements. Ainsi, en tirant des boules d'une urne où sont des boules blanches et des boules noires, qui ont leur probabilité respective d'être tirées, la cause accidentelle n'introduit aucune boule nouvelle de même couleur ou d'une couleur différente; mais elle fait que l'ordre dans le tirage est plus ou moins régulier, s'écarte plus ou moins de l'ordre calculé, bien que son action se neutralise à la longue. On conçoit en effet que les boules peuvent être mêlées d'une infinité de manières.

S'il n'existait que des causes constantes, sans mélange de causes accidentelles, elles amèneraient tout d'abord des résultats calculables et en rapport avec leur degré d'énergie; mais comme il est impossible d'écarter entièrement les causes accidentelles, ce n'est qu'après un certain nombre d'expériences, qui dépend de la quantité et de la grandeur des causes accidentelles, que les résultats seront en rapport avec le degré d'énergie des causes qui les produisent.

La distinction que j'établis entre les trois espèces de causes qui influent sur tous les phénomènes, s'expliquera mieux par un exemple. Supposez qu'il soit question de mesurer une longueur, la taille d'un homme; et, pour écarter les difficultés, admettez d'abord que la mesure que l'on compte employer est parfaitement exacte, seulement le nombre des divisions est limité, et les appréciations ne peuvent être prises qu'au dixième du millimètre. Admettez même que l'homme dont on veut connaître la taille se tient parfaitement immobile pendant les épreuves et n'a aucune tendance ni à s'allonger ni à se raccourcir. Supposez enfin que celui qui est chargé de mesurer use de toutes les précautions imaginables pour arriver à une grande précision, qu'en un mot, il n'existe aucune espèce de cause *constante* ou *variable* qui puisse altérer l'exactitude des résultats.

Malgré toutes ces suppositions, on conçoit que les mesures

que l'on prendra ne seront pas identiquement les mêmes; il se présentera de petites différences entre elles, sous l'influence des causes *accidentelles*, et, sans être maladroit, on pourra s'écarter de la taille véritable que l'on cherche à déterminer, d'un demi-millimètre par exemple, soit en plus, soit en moins. Ainsi, pendant qu'on mesure, la règle ne s'appliquera pas toujours horizontalement sur le sommet de la tête, elle n'appuiera pas toujours également fort, ni toujours sur le même point; les cheveux se dérangeront et formeront une épaisseur qui ne sera pas constamment la même; le coup d'œil ne sera pas également juste, ni les lectures également sûres.

Pour les personnes qui se sont occupées de pareilles mesures, elles accorderont bien volontiers, sans doute, que quand les erreurs ne vont pas au delà d'un demi-millimètre, on peut se tenir satisfait du résultat obtenu.

Or, si l'on avait pris mille mesures successives, bien peu seraient en erreur d'un demi-millimètre. La plupart ne différeraient de la véritable taille, soit en plus, soit en moins, que d'un dixième de millimètre, d'autres de deux dixièmes, d'autres de trois dixièmes, et ainsi de suite.

En ne considérant que la mesure la plus grande et la mesure la plus petite, on trouverait entre elles une différence d'un millimètre entier, et l'on pourrait concevoir neuf groupes de mesures intermédiaires, procédant par différences d'un dixième de millimètre.

Ces divers groupes, on le sait déjà, ne seraient pas composés au hasard de nombres plus ou moins grands, bien qu'ils proviennent de petites maladresses, de petites inexactitudes du coup d'œil. Leur formation se trouve indiquée *à priori* par la loi des causes accidentelles; ainsi l'on peut dire d'avance combien d'observations tomberont dans le groupe qui renferme les mesures les plus petites, combien tomberont dans le groupe immédiatement supérieur, présentant un dixième de millimètre en plus; combien d'observations formeront le troisième groupe, ayant deux dixièmes de millimètre en plus; et ainsi de suite.

Ce singulier résultat étonne toujours les personnes peu familiarisées avec ce genre de recherches. Comment croire en effet

que des erreurs, que des maladresses se font avec la même régularité qu'une série d'événements dont l'ordre de succession se trouve calculé d'avance? Il se passe ici quelque chose de mystérieux qui cesse de surprendre, quand on examine les choses de plus près. Le mode d'action des causes accidentelles n'a point été étudié avec assez de soin, et cependant il domine en quelque sorte l'explication de tous les phénomènes qui dépendent du calcul des probabilités.

Voilà pour les causes accidentelles. Nous voyons qu'à la longue il s'établit une sorte d'équilibre entre les erreurs en plus et les erreurs en moins, équilibre qui fait qu'on arrive en définitive à la véritable grandeur qu'on voulait mesurer.

Il n'en serait pas de même sous l'influence d'une cause *constante* d'erreur. Cette cause devrait prévaloir à la longue, et non-seulement le résultat final en serait affecté, mais, sous l'influence des causes accidentelles, les différents groupes se classeraient suivant des lois nouvelles, et n'auraient plus la symétrie que nous avions reconnue quand les chances étaient égales. Ainsi, nous avons supposé que la personne mesurée se tenait parfaitement immobile pendant les épreuves, et n'avait aucune tendance à s'allonger ni à se raccourcir. Mais, si le contraire avait lieu, on se trouverait exposé à faire de nouvelles erreurs, qui s'ajouteraient aux erreurs accidentelles.

Nous pouvons faire ici deux hypothèses : ou bien la personne mesurée, sans conserver une immobilité absolue, a autant de tendance à s'allonger qu'à se raccourcir; ou bien elle a une tendance plus prononcée, soit à s'allonger, soit à se raccourcir.

Dans le premier cas, la mobilité de la personne devrait être considérée comme une cause d'erreur accidentelle, dont les effets finiraient par se détruire; dans le second cas, au contraire, on arriverait en définitive à une mesure soit trop grande, soit trop petite. Si l'on avait mesuré, chaque jour, la même personne un assez grand nombre de fois pour anéantir les effets des causes accidentelles, la constance du résultat qu'on obtiendrait pourrait faire croire qu'il est exact : on voit déjà avec quelle circonspection il convient de procéder dans l'appréciation des grandeurs.

Il arriverait plus généralement que la taille moyenne obtenue varierait d'un jour à l'autre, parce que la personne n'aurait pas la même tendance à s'allonger. La cause d'erreur serait alors *variable.*

La cause d'erreur peut être variable de différentes manières. Elle peut l'être, parce qu'en effet la personne mesurée, soit par caprice, soit par d'autres motifs, a une tendance à exagérer constamment sa taille, mais non d'une manière régulière. Elle peut varier encore *périodiquement,* si la personne est mesurée à différentes heures du jour : on a cru remarquer en effet que l'homme est plus grand le matin, au sortir du lit, que le soir, après les fatigues de la journée. Ainsi, 1000 mesures, prises le matin, donneraient une taille moyenne plus grande que 1000 mesures prises le soir, et la taille varierait par des nuances intermédiaires aux autres heures du jour. La cause peut donc varier régulièrement et irrégulièrement. Les variations *régulières périodiques* sont très-nombreuses dans la nature et méritent d'occuper une place particulière.

TROISIÈME PARTIE.

APPLICATION DE LA THÉORIE DES PROBABILITÉS AUX SCIENCES D'OBSERVATION.

---

1. SCIENCES PHYSIQUES. — **Températures, pluies.**

Dans les sciences d'observation, on a principalement deux choses en vue : déterminer la précision d'un résultat observé, estimer la probabilité de son retour. Parmi les sciences physiques, il en est peu qui doivent plus souvent recourir à ces sortes d'appréciations que la météorologie. Nous allons prendre quelques exemples dans cette science.

Le problème des températures est un des plus usuels et des plus intéressants de la météorologie ; on est souvent préoccupé de savoir quelle est la température d'un jour de l'année et quelle chance on a de l'obtenir. On voudrait savoir, par exemple, quelle est la température du premier jour de l'an et ce qu'on peut parier relativement à l'abaissement plus ou moins grand de cette température.

Il faudra commencer par consulter l'expérience du passé. Ainsi, à Bruxelles, pendant vingt années, de 1833 à 1852, on a eu l'occasion d'observer vingt températures du premier jour de l'an, qui toutes ont été différentes et qui ont donné en moyenne 2,51 degrés centigrades. Cette moyenne est le résultat le plus probable, et on l'adopte provisoirement pour température normale du premier jour de l'an. Il est bien entendu que cette température normale n'est point définitive, et qu'elle pourra être modifiée par des observations ultérieures; on peut calculer même, dès à présent, qu'il y a 1 contre 1 à parier qu'elle ne variera pas de plus de 0°,70, c'est-à-dire qu'elle ne sera pas plus grande que 3°,21, et pas plus petite que 1°,81. La quantité 0°,70 est ce que nous avons nommé l'*erreur probable du résultat;* nous avons donné plus haut la méthode pour la déterminer, page 53.

Si nous voulions maintenant, d'après l'expérience du passé, nous éclairer sur ce que nous pouvons attendre de l'avenir, il faudrait calculer l'*erreur probable d'une prochaine observation;* or, nous trouverions, par la même méthode de calcul, 3°,16; c'est-à-dire qu'il y a 1 contre 1 à parier, qu'au premier jour de l'an prochain, la température moyenne des vingt-quatre heures ne s'écartera pas de plus de 3°,16 en plus ou en moins, de la moyenne 2°,51; et qu'elle ne sera pas plus grande que 5°,67 et pas plus petite que —0°,65. C'est tout ce que l'observation nous permet de prédire, eu égard à la variabilité des températures atmosphériques et au nombre d'années sur lesquelles reposent nos prévisions. Si nous en revenons aux observations mêmes qui nous ont servi pour déterminer la moyenne, nous verrons qu'elles sont ou plus grandes ou plus petites que cette moyenne, et que les écarts, ou ce que nous pourrions nommer les erreurs faites par la nature en s'écartant de sa température normale, se groupent symétriquement des deux côtés de la moyenne. Si le nombre des observations était suffisamment grand, on verrait que la nature distribue les écarts ou erreurs avec tant de mesure et de précision, qu'on peut calculer leur classement *à priori*. C'est ce que nous avons nommé *la loi des causes accidentelles,* page 55.

Cette fois, les causes accidentelles sont les changements des vents, le plus ou moins de nuages répandus dans le ciel, l'humidité de l'air, les pluies et tous ces phénomènes qui répandent la variété et la vie à la surface du globe. Leurs effets sont plus sensibles en hiver qu'en été; et, ici encore, on retrouve une admirable ordonnance dans l'étude des effets.

Il est des jours pour lesquels on reconnaît des causes spéciales d'anomalie dont les retours sont périodiques, d'autres pour lesquels il existe des anomalies dont nos connaissances ne nous permettent pas encore d'assigner les retours.

Ainsi, le 10 janvier présente une anomalie remarquable; la température moyenne est d'environ 2 degrés et demi plus basse que ne l'indique la loi de continuité : il doit exister, à cette époque de l'année, une cause spéciale de refroidissement dont les effets sont plus ou moins masqués par d'autres causes influentes qui agissent dans un sens contraire et tendent à élever la température diurne. Ce n'est que par une longue série d'observations qu'on parvient à mettre en évidence les effets produits par la cause que l'on étudie.

Nous avons vu précédemment que, sous l'influence de causes purement accidentelles, un événement varie de la manière la plus régulière. Il est deux autres propriétés non moins remarquables qui se rapportent à l'ordre de succession dans lequel cet événement se présente, quand il n'existe que deux espèces de chances possibles et que ces chances sont supposées égales et indépendantes : prenons l'exemple le plus simple, le jet d'une pièce, parfaitement homogène, pour amener pile ou croix. On peut demander combien de fois, sur un très-grand nombre de jets, pile aura tombé une fois isolément, deux fois de suite, trois fois de suite, etc. Le calcul montre qu'à cause de la parfaite égalité des chances, 1° pile tombera isolément autant de fois que croix; 2° si les chances sont indépendantes et si un premier jet ne prédispose pas à amener un second jet semblable, le nombre des combinaisons binaires où pile aura tombé deux fois de suite, sera la moitié du nombre de fois où pile se sera présenté seul; le nombre des combinaisons ternaires sera la moitié du nombre de combinaisons binaires, et ainsi de suite; il en sera de même pour croix.

S'il s'agit maintenant de phénomènes, on pourra faire la même observation ; c'est même à ces propriétés qu'on peut reconnaître si les chances sont égales et indépendantes. Par exemple, le thermomètre monte tel jour, il baisse tel autre jour; parfois il monte ou descend pendant plusieurs jours de suite. On voudrait savoir si les chances pour la hausse et la baisse de la température sont égales et si les causes qui les produisent sont indépendantes : il faudra compter, sur un grand nombre d'années, combien de fois le thermomètre a monté pendant un jour, pendant deux jours de suite, pendant trois jours de suite, etc.; et l'on en fera autant pour la baisse de la température. Nous avons fait ces calculs pour Bruxelles et pour les vingt années de 1833 à 1852; les résultats sont consignés dans le tableau suivant :

LA PÉRIODE est de	NOMBRE DE PÉRIODES DE		TOTAL.	NOMBRE PROPORTIONNEL	
	hausse thermom.	baisse thermom.		observé.	calculé.
1 jour.	703	718	1421	418	434
2 jours.	481	485	966	284	284
3 —	265	277	542	159	142
4 —	135	112	247	72	71
5 —	70	62	132	39	36
6 —	40	23	63	19	18
7 —	10	8	18	5	9
8 —	5	4	9	3	4
9 —	2	2	4	1	2
TOTAUX.	1711	1691	3402	1000	1000

On voit, par les deuxième et troisième colonnes de ce tableau, que les chances pour la hausse et la baisse du thermomètre ont

été parfaitement égales : les différentes périodes durant lesquelles le thermomètre a monté ou descendu pendant un jour, pendant deux jours de suite, pendant trois jours, etc., s'accordent autant qu'on peut l'espérer dans de semblables épreuves. Il reste à savoir ensuite si les causes de hausse et de baisse étaient indépendantes et si le thermomètre, quand il avait pris un mouvement ascendant ou descendant, n'avait pas une tendance à y persévérer; c'est ce qu'indiquent les deux dernières colonnes. L'avant-dernière reproduit proportionnellement les nombres de la colonne précédente; il faudrait, d'après la théorie, que chacun de ces nombres fût le double de celui qui se trouve immédiatement au-dessous de lui; c'est ce qui arrive généralement, excepté pour le premier, sur lequel nous reviendrons. Pour mieux juger des choses, portons dans la dernière colonne le nombre 284, qui représente la quantité des périodes de deux jours pendant lesquelles le thermomètre a monté ou descendu; et écrivons successivement au-dessous de lui la moitié de ce nombre, le quart, le huitième, etc., nous trouverons une série de nombres en progression géométrique, qui s'accordent fort bien avec les nombres de la colonne précédente et montrent, en effet, d'après l'accord de l'observation et du calcul, que les causes influentes n'étaient pas seulement égales, mais qu'elles étaient encore indépendantes.

Il reste seulement à rechercher comment il se fait que le premier nombre ne soit pas 568 ou le double de 284, comme l'exigeait la continuité de la série. Il faut se rappeler qu'il n'en est pas ici comme du jet de pile ou croix; nous avons dû grouper nos résultats et dire que le thermomètre avait monté ou descendu pendant un jour, quand il y avait une hausse ou une baisse sensible après vingt-quatre heures, bien que ce mouvement n'eût eu lieu que pendant un temps beaucoup plus court peut-être. Le calcul nous montre qu'en prenant 568, le nombre serait exagéré et l'observation le réduit à 434, complément des autres nombres jusqu'à 1000. Le nombre 434 est d'un quart environ plus petit que celui que donnerait la progression géométrique.

Prenons un autre exemple; nous avons voulu savoir si, pour Bruxelles, le nombre des jours de pluie est sensiblement égal au

nombre de jours sans pluie ; et nous avons trouvé encore que les chances pour et contre sont à peu près exactement les mêmes; mais il n'en a pas été ainsi pour l'indépendance des chances. Les jours de pluie ou sans pluie isolés ont été beaucoup moins nombreux que ne l'indique le calcul ; la série des nombres observés forme bien encore une progression géométrique, mais la raison au lieu d'être $\frac{1}{2}$ est $\frac{2}{3}$ à peu près ; il semble donc qu'il y a une tendance, quand la pluie ou le beau temps a commencé, à ce que cet état se prolonge pendant plusieurs jours : la probabilité de la continuation est $\frac{2}{3}$ environ au lieu de $\frac{1}{2}$.

Voici un autre exemple analogue au précédent ; il concerne le *classement des pluies d'après leur durée.* Nous avons compté combien de pluies ont duré moins d'une heure, combien ont duré de 1 à 2 heures, de 2 à 3 heures, et ainsi de suite. Nous avons cherché ensuite si les nombres obtenus de cette manière étaient liés par une loi de continuité, et nous avons reconnu qu'ils suivaient encore une progression géométrique, dont le rapport est 0,7. Quand la pluie a commencé, il s'établit donc une tendance à ce qu'elle continue ; et la probabilité qui, à cause de l'égalité des chances, aurait dû être $\frac{1}{2}$ devient $\frac{7}{10}$.

2. SCIENCES NATURELLES, *botanique.* — Floraison, phénomènes périodiques.

Les sciences naturelles jusqu'à présent ont été moins accessibles aux théories mathématiques que les sciences physiques, cependant elles offrent plusieurs parties qui se prêteraient avantageusement aux combinaisons du calcul, et surtout du calcul des probabilités. L'on en trouve un exemple frappant dans tout ce qui se rapporte aux phénomènes périodiques, parce que ces phénomènes s'expriment en grande partie par des dates et se traduisent en nombres. Linné indiqua, le premier, la marche qu'il convient de suivre pour le règne végétal ; son appel ne fut point perdu pour les physiciens qui s'occupaient des grands phénomènes de la nature et qui sentaient les liens intimes qui existent entre la

météorologie et la science qui traite des êtres organisés : Réaumur, Adanson, l'abbé Cotte entrèrent successivement dans cette voie féconde qui fut abandonnée pendant quelque temps et reprise ensuite avec une nouvelle ardeur.

Le point essentiel est de reconnaître d'abord quelles sont les causes qui peuvent avoir de l'influence sur le développement progressif des plantes : s'il fallait en faire une énumération complète, peut-être devrait-on renoncer à ce genre de recherches ; mais nous pouvons nous borner ici à considérer les causes prédominantes, comme cela se pratique dans les sciences physiques, sauf à revenir ensuite aux causes secondaires, qu'on peut négliger dans une première recherche. Pour plus de facilité même, il ne sera question ici que de la floraison.

Il faut ranger en quatre classes principales les causes qui peuvent influer sur la floraison de la plante :

Les *causes géographiques,* telles que la latitude, la longitude et l'altitude ;

Les *causes locales,* telles que la nature du sol, l'exposition, la quantité de lumière ;

Les *causes individuelles,* telles que l'âge et la vigueur de la plante ;

Les *causes météorologiques,* telles que la température, la nature des vents, l'humidité de l'air, la quantité de pluie, l'état du ciel, etc.

Il serait bien difficile d'étudier toutes ces causes simultanément et de reconnaître la part d'influence qui revient à chacune d'elles. Le moyen le plus sûr sera de procéder du simple au composé.

Remarquons d'abord que nous pouvons éliminer les effets des causes qui appartiennent aux trois premières catégories, en observant toujours les mêmes plantes sur un même point du globe, dans une même exposition et dans un même terrain ; les différences qui surviendront dans les époques de la floraison, quand on aura rendu ainsi toutes les autres circonstances égales, ne pourront provenir que des causes météorologiques.

Supposons, de plus, que c'est le même observateur qui suit le développement des plantes, et prend soin d'enregistrer leurs

époques naturelles; plusieurs observateurs verraient sans doute de différentes manières, et l'un aurait une propension à marquer l'époque de la floraison plus tard qu'un autre. Cette différence, qu'on pourrait nommer l'*équation personnelle de l'observateur*, serait une nouvelle cause d'erreur, dont il faudrait tenir compte.

L'on admettra donc que toutes les précautions ont été prises pour rendre aussi égales que possible toutes les causes en général, autres que les causes météorologiques, qui peuvent différencier les phénomènes de la végétation. Ces conditions ne sont pas bien difficiles à remplir, puisqu'il me suffira d'observer les mêmes plantes, dans le même lieu et dans la même exposition, pendant plusieurs années consécutives, afin d'éliminer par la répétition les effets des causes fortuites; l'on aura soin d'enregistrer en même temps l'état météorologique de l'air, dont il s'agit de déterminer l'influence.

Supposons maintenant qu'on ait enregistré soigneusement, chaque année, la floraison d'une plante bien connue et sur l'espèce de laquelle il ne puisse pas y avoir de méprise, le lilas commun, *syringa vulgaris*, par exemple. Après une série d'années, on aura inscrit une série de dates, dont on prendra la moyenne : ce sera l'époque de la floraison normale de la plante. Cette époque cependant ne sera pas tellement fixe, qu'elle ne puisse varier par des observations ultérieures; cependant on peut, dès à présent, en assigner l'*erreur probable*. On peut aussi déterminer l'écart probable d'une observation ultérieure, de la date, par exemple, à laquelle fleurira le lilas, l'année prochaine.

Le tableau qui suit jettera plus de jour sur ce sujet, on y trouvera les dates auxquelles ont fleuri, depuis quinze ans, trois des plantes les plus connues, le lilas, le seringat et le faux ébénier; on y verra en même temps les dates moyennes de la floraison, les écarts observés, chaque année, et enfin les erreurs probables des résultats et des observations isolées.

ANNÉES.	Syringa vulgaris.		Philadelphus coronarius.		Robinia pseudo-acacia.	
	Date de la floraison.	Avances et retards.	Date de la floraison.	Avances et retards.	Date de la floraison.	Avances et retards.
1839	10 mai.	— 9 jours.	4 juin.	—10 jours.	11 juin.	— 9 jours.
1840	28 avril.	+ 3 »	16 mai.	+ 9 »	30 mai.	+ 2 »
1841	24 »	+ 7 »	11 »	+14 »	21 »	+11 »
1842	28 »	+ 3 »	16 »	+ 9 »	28 »	+ 4 »
1843	20 »	+11 »	16 »	+ 9 »	30 »	+ 2 »
1844	25 »	+ 6 »	21 »	+ 4 »	25 »	+ 9 »
1845	13 mai.	—12 »	7 juin.	—13 »	12 juin.	—10 »
1846	12 avril.	+19 »	19 mai.	+ 6 »	1 »	+ 1 »
1847	9 mai.	— 8 »	29 »	— 4 »	29 mai.	+ 3 »
1848	21 avril.	+10 »	16 »	+ 9 »	17 »	+15 »
1849	2 mai.	— 1 »	26 »	— 1 »	1 juin.	+ 1 »
1850	30 avril.	+ 1 »	28 »	— 3 »	7 »	— 5 »
1851	1 mai.	0 »	3 juin.	— 9 »	13 »	—11 »
1852	12 »	—11 »	31 mai.	— 6 »	14 »	—12 »
1853	19 »	—18 »	3 juin.	— 9 »	12 »	—10 »
Floraison moyenne	0,9 mai.		24,7 mai.		2,1 juin.	
Écart probable d'une obser.	6,5 jours.		5,6 jours.		5,5 jours.	
Id. id. du résultat.	1,7 »		1,4 »		1,4 »	

La date moyenne de la floraison peut être fixée au 1er mai pour le lilas, au 25 du même mois pour le seringat, et au 2 juin pour le faux ébénier : on voit, de plus, que l'erreur probable de ces dates est à peu près la même, et ne va pas au delà d'un jour et demi. L'erreur probable est naturellement plus grande pour une observation isolée, elle est de 5 à 6 jours ; c'est-à-dire que, pour le faux ébénier, par exemple, il y a 1 contre 1 à parier que la floraison aura lieu le 2 juin et que le retard ou l'avance n'excédera pas 5 à 6 jours.

Bien que les trois plantes indiquées fleurissent à des époques différentes, on voit cependant qu'elles accusent à peu près le même retard et la même avance pour chaque année.

3. SCIENCES NATURELLES, *anthropologie*. — **Unité de l'espèce humaine, croissance et poids de l'homme, naissances, etc.**

Il n'est peut-être pas d'étude où la théorie des probabilités trouve des applications plus intéressantes que dans les phénomènes relatifs à l'homme. Une des plus curieuses, sans contredit, est la démonstration directe de l'unité de l'espèce humaine et de la possibilité d'en assigner le type : entrons dans quelques détails à ce sujet.

Supposons qu'on veuille mesurer exactement la hauteur et les proportions de l'Apollon du Belvédère : dix personnes sont chargées successivement de ce soin ; il arrivera certainement que les dix séries de mesures ne seront pas identiquement les mêmes; les différences seront faibles, il est vrai ; mais enfin elles seront sensibles, dans l'hypothèse même où les séries auraient été prises par une même personne. Les différences seront plus grandes, s'il s'agissait de reproduire dix statues égales à celle de l'Apollon, parce qu'à l'incertitude des mesures, se joindraient les défauts de copie, les erreurs provenant du retrait ou de la dilatation des matériaux employés, etc. Si l'on supprimait ensuite le type primitif et si l'on avait à juger de sa hauteur et de ses proportions

par celles des dix copies, il faudrait revenir à l'emploi des moyennes et l'on estimerait l'erreur probable, c'est-à-dire qu'on rechercherait de combien on a pu s'écarter du modèle primitif.

Que dire cependant, si les dix copies avaient été distribuées dans différents pays pour devenir elles-mêmes les types de copies nouvelles? et si, après plusieurs siècles, il n'était donné de juger du type primitif que par les reproductions diverses exécutées d'après une ou plusieurs des premières copies qui ont cessé d'exister depuis? A toutes les incertitudes que nous avons signalées, viendraient se joindre encore celles qu'on a pu y introduire pour se conformer à certaines exigences du temps et des lieux. Il est évident qu'à la longue le type primitif se trouverait tellement altéré dans les copies, que la moyenne générale ne pourrait en donner qu'une idée très-imparfaite. Il faut cependant distinguer : si toutes les causes modificatrices aux différentes époques n'avaient été qu'*accidentelles*, et s'il ne s'en était pas trouvé de constantes ni de variables dans le nombre, ces causes accidentelles n'auraient eu pour effet que de produire des écarts plus ou moins grands du type primitif représenté par la moyenne générale des copies, sans altérer le type même.

Il serait donc possible, aujourd'hui, de reproduire le type qui a servi à toutes les copies que nous avons encore sous les yeux et que nous aurions à mesurer avec soin pour en déduire la moyenne générale. Mais par quel caractère pourrait-on reconnaître que les statues que nous regardons comme des copies d'un même type le sont véritablement ? C'est ici le lieu de se rappeler l'importante distinction que nous avons établie entre une moyenne arithmétique et une *moyenne* proprement dite. Quand des nombres sont destinés à représenter *une même chose*, et ne diffèrent que par des causes accidentelles qui ont pu les rendre indifféremment ou plus grands ou plus petits, alors ces nombres présentent des caractères tout particuliers, et quand on les classe par ordre de grandeur, ils se trouvent soumis à un classement calculable *à priori*. Le tout consiste donc à reconnaître si les mesures recueillies sur toutes les statues qu'on a pu mesurer, présentent en effet ces caractères distincts.

L'expérience dont il vient d'être parlé a été faite, on a pu le re-

connaître déjà. Les copies en question ne sont pas des statues, ce sont des êtres vivants que nous avons sous les yeux et que nous avons pu mesurer. Or, il se trouve en effet que toutes les mesures classées par ordre de grandeur obéissent de la manière la plus curieuse à la loi des causes accidentelles. Il existe donc un type, du moins pour les pays que nos recherches ont pu embrasser. Il resterait à reconnaître si ce type est universel, en admettant quelques causes variables provenant de la différence des climats. Il semblerait en effet que les différences ne sont point essentielles et que le Créateur, en laissant aux causes accidentelles une action si large, a placé à côté d'elles des lois conservatrices qu'il n'est pas donné à l'homme de pouvoir enfreindre.

Citons un exemple de ce qui vient d'être dit. On trouve dans un recueil médical d'Édimbourg les résultats de 5,738 mesures prises sur les poitrines des soldats des différents régiments écossais. Ces mesures sont exprimées en pouces anglais et groupées par ordre de grandeur, en procédant par différences de 1 pouce. La plus petite mesure est de 33 pouces environ, et la plus grande de 48; la moyenne de toutes les mesures donne un peu plus de 40 pouces pour la circonférence de la poitrine d'un soldat écossais : c'est aussi le nombre qui correspond au plus grand nombre de mesures ; et, comme la théorie l'indique, les autres groupes diminuent de grandeur à mesure qu'ils s'éloignent de celui-ci ; l'écart probable est de $1^{\text{pouce}},31$. On peut demander maintenant si ce serait exagérer que de parier 1 contre 1 qu'une personne peu exercée à prendre des mesures sur le corps humain va se tromper de $1^{\text{pouce}},31$, en mesurant une poitrine de 40 pouces de circonférence. Ces mesures sont très-difficiles, car les variations produites sur la poitrine de l'homme par l'effet de la respiration s'élèvent certainement à cette valeur de $1^{\text{pouce}},31$. En conséquence, les résultats de toutes les mesures prises sur les soldats écossais se sont distribués, quant à l'ordre de grandeur, de la même manière que se distribueraient 5,738 mesures prises, sur un seul soldat ayant une poitrine de 40 pouces de circonférence, par une personne peu exercée et dont l'erreur probable serait de $1^{\text{pouce}},31$.

Le type humain, pour des hommes d'une même race et d'un même âge, se trouve si bien établi, que les écarts entre les résultats du calcul et ceux de l'observation, malgré les nombreuses causes accidentelles qui peuvent les provoquer et les exagérer, ne dépassent guère ceux que des maladresses pourraient produire dans une série de mesures prises sur un même individu. On rejette à la vérité des régiments les hommes qui sont déformés par un excès d'embonpoint ou de maigreur; mais en les admettant tous, on ne ferait qu'élargir les limites de l'erreur probable, sans altérer la loi qui préside au classement des nombres.

Prenons un nouvel exemple relatif à la taille des conscrits français. M. d'Hargenvilliers, en faisant connaître comment 100 000 hommes se sont distribués par ordre de grandeur et par groupes différant entre eux de 27 millimètres, n'a fait qu'indiquer le total des conscrits ayant moins de $1^m,570$, et celui des conscrits ayant plus de $1^m,759$; il s'en trouvait 28620 de la première catégorie, et 2490 seulement de la seconde. Au moyen des sept groupes intermédiaires qu'il a donnés, il a été possible de reconnaître comment il fallait rétablir les huit groupes d'hommes compris dans le cas de réforme pour défaut de taille, et les sept groupes d'hommes ayant plus de $1^m,759$.

On a reconnu, de plus, que l'écart probable était de $0^m,049$ ou de cinq centimètres environ. La loi de continuité des nombres montre aussi que deux individus seulement sur 100 000 ont, en France, plus de $1^m,921$, et que quatre tombent au-dessous de la taille de $1^m,297$.

Cette même loi de continuité nous permet de reconnaître un fait plus remarquable; on pouvait le soupçonner, mais nous en trouvons ici la preuve : c'est que le nombre des réformes pour défaut de taille est exagéré de beaucoup. Non-seulement nous en avons la preuve, mais nous pouvons déterminer le montant de la fraude. Les documents officiels comptent 28620 hommes, sur cent mille, qui tombent au-dessous de $1^m,570$, et le calcul n'en donne que 26345. N'est-il pas à présumer que les 2275 hommes qui font la différence de ces nombres, ont été réformés frauduleusement? On le comprendra d'autant mieux,

qu'il est très-facile de diminuer la taille de deux à trois centimètres, quand on y a un intérêt aussi majeur que celui de la réforme. D'une autre part, les autorités sont indulgentes, lorsqu'il s'agit de substituer à des hommes très-petits d'autres hommes qui ont une taille plus avantageuse. Cette conjecture prend un nouveau degré de consistance, si l'on observe que 2275 hommes manquent dans les deux groupes qui arrivent immédiatement au-dessus de la limite $1^{m},570$.

La loi des causes accidentelles a encore le précieux avantage que, si l'on connaît le nombre des observations qui concourent à former une *moyenne* proprement dite, et les limites extrêmes qu'atteignent les valeurs dans toutes leurs variations, on peut reconstruire la série complète de ces valeurs rangées par ordre de grandeur; par exemple, on a pesé 1000 enfants nouveau-nés, et les poids ont varié de 4 à 10 livres, comment ces enfants doivent-ils être classés sous le rapport de la pesanteur? Le tableau suivant contient les résultats des calculs, et l'on a placé dans une colonne suivante les nombres qui ont été obtenus réellement par l'observation, d'après M. Elsaesser :

Poids des enfants.	Nombre d'enfants d'après le calcul.	Nombre d'enfants d'après l'observation.
De 4 à 5 livres.	21	13
5 à 6 »	167	158
6 à 7 »	412	417
7 à 8 »	318	318
8 à 9 »	76	83
9 à 10 »	6	11
	1000	1000

Ces résultats sont aussi concordants qu'on peut le désirer dans de pareilles matières; les pesées en effet sont difficiles, et quand on doit les exprimer en nombres ronds, il est presque impossible d'obtenir une concordance parfaite.

Ce qui appartient aux naissances et à la fécondité de l'homme en général ne présenterait pas des exemples moins curieux. Sup-

posons qu'on ait à rechercher s'il naît plus de garçons que de filles dans la ville de Bruxelles ; il faudra naturellement recourir aux registres de l'état civil. Si l'observation avait commencé dès 1825, on eût trouvé pour cette année 2004 naissances masculines et 1759 naissances féminines, ce qui donne le rapport 114 à 100.

Ce rapport très-grand aurait été fort modifié par les résultats de 1826, qui donnent 101. Auquel faut-il croire ? Le bon sens, d'accord avec la science, nous conseille de faire de nouvelles observations, et d'adopter provisoirement le résultat moyen 107, qu'on aurait obtenu en prenant toutes les observations recueillies.

La troisième année aurait encore modifié ce rapport, en le diminuant; on aurait obtenu 106 pour résultat des trois premières années d'observations.

En continuant à opérer de la même manière, au bout de la dixième année on aurait eu, pour le rapport cherché, 104 ; et, après 18 ans, 105. Ce dernier rapport, comparé à ceux obtenus pour chaque année prise séparément, en aurait plus ou moins différé : les plus grands écarts en plus et en moins sont donnés par les années 1825 et 1839, où l'on a eu les rapports 114 et 99.

La précision du résultat général 105, comparée à celle d'une année particulière, aurait été dans le rapport des racines carrées des nombres 18 et 1, d'après ce que nous avons déjà vu, ou comme 4,24 est à 1.

Bien que la théorie indique, en thèse générale, que la précision des résultats augmente avec le nombre des observations, il peut se faire qu'accidentellement on tombe tout d'abord sur des résultats plus précis que ceux que l'on obtiendrait en ajoutant de nouvelles observations aux observations déjà faites. Ainsi les résultats particuliers des années 1829, 1831, 1833, 1834, etc., ont tous également donné le rapport 105, et se sont plus rapprochés du résultat définitif que le rapport calculé sur l'ensemble des observations des dix premières années. Mais cette précision n'est alors que fortuite, et l'on n'a aucune raison pour pouvoir s'y fier avec une probabilité suffisante.

Si l'on continuait indéfiniment les observations, on obtiendrait un rapport qui tendrait de plus en plus à être égal au véritable rapport qu'on ignorait et dont la nature nous faisait mystère; nous savons même mesurer, à chaque épreuve, l'erreur probable du résultat, et apprécier l'écart auquel on serait exposé dans une épreuve nouvelle.

4. SCIENCES POLITIQUES, *statistique*. — **Mortalité de l'homme. — Tables de mortalité; leur usage**[1].

La mortalité s'estime en prenant le rapport entre le nombre des décès et le nombre des habitants d'un pays dans un temps donné, dans une année par exemple. On dit, dans ce sens, que la mortalité de la Belgique a été, en 1850 et en 1851, de 1 sur 47 environ; ce qui veut dire que, pour 47 habitants, on a compté 1 décès. En 1849, la mortalité avait été plus forte; elle s'était élevée à 1 sur 36. La mortalité varie assez sensiblement d'une année à l'autre; cet élément statistique est influencé par des causes nombreuses, mais plus spécialement par les grandes calamités publiques, telles que les disettes, le manque de travail, les épidémies, etc. Quand on prend en considération un grand nombre d'années, on reconnaît que le chiffre de la mortalité oscille autour d'une moyenne générale conformément à la loi des causes accidentelles; cependant il existe aussi des causes, soit constantes, soit variables, qui modifient ce chiffre, telles que les progrès des lumières, de l'hygiène publique, de l'aisance. On a constaté que, pendant le dernier siècle, la mortalité a diminué progressivement dans la plupart des États de l'Europe.

La mortalité n'est pas la même pour les deux sexes, pour l'habitant des villes et pour celui des campagnes, pour l'ouvrier des fabriques et pour l'agriculteur. Toutes ces nuances sont profon-

[1] Ce chapitre est en grande partie la reproduction de l'article *Tables de mortalité* que j'ai inséré dans le *Dictionnaire de l'économie politique* de France. On peut recourir à ce dictionnaire, où je donne les vingt principales tables de mortalité connues.

dément marquées dans les registres mortuaires, mais il n'en est aucune qui ait plus d'influence que l'âge.

Les nombreuses recherches faites sur ce dernier élément dans les différents pays civilisés ont conduit à construire des *tables de mortalité*, dont l'importance justifiera les détails dans lesquels nous allons entrer.

Une table de mortalité a pour objet de faire connaître combien, sur un nombre donné de naissances, il reste de survivants à la fin de chaque année. De pareilles tables présentent un grand intérêt, non-seulement pour l'hygiène publique et l'histoire naturelle de l'homme, mais encore pour les sciences politiques ; elles servent à donner la mesure de la valeur physique des nations et à résoudre la plupart des questions qui se rattachent aux sociétés d'assurances sur la vie, et aux caisses de pensions et de retraites.

Les plus anciennes recherches sur ce sujet important paraissent dues à John Graunt, qui les consigna, en 1661, dans ses annotations sur les bills de mortalité de la ville de Londres. Elles ne tardèrent pas à être fécondées par le calcul des probabilités auquel le génie de Pascal venait de donner naissance, car il est à remarquer que ces deux ingénieuses applications des sciences exactes firent presque en même temps invasion dans le domaine des sciences politiques.

Il existe, pour la formation des tables de mortalité, deux méthodes bien distinctes, mais que l'on a l'habitude de confondre : l'une, plus expéditive, emploie les listes mortuaires seulement ; l'autre, rigoureuse et directe, emploie, avec les listes mortuaires, les chiffres de la population de chaque âge. Nous allons essayer de donner une idée de l'une et de l'autre.

Méthode des listes mortuaires. Elle admet implicitement l'hypothèse que la population de chaque âge reste annuellement la même, et que, par suite, les décès de chaque âge présentent, aussi, annuellement les mêmes chiffres ; de sorte que les listes mortuaires ne font que se reproduire identiquement d'année en année ; et que celui qui en aurait une, connaîtrait nécessairement toutes les autres. Cependant comme, dans la pratique, des circonstances accidentelles frappent parfois de préférence l'un ou 'autre âge, on prend, pour éliminer ces anomalies fortuites,

plusieurs listes annuelles dont on déduit une liste moyenne, qui représente alors la mortalité normale.

C'est ainsi que l'astronome Halley construisit la plus ancienne table de mortalité connue (*Transactions philosophiques de Londres pour* 1693). Le savant anglais prit la ville de Breslau, en Silésie, pour type de ses calculs, parce qu'il avait reconnu que la population y était sensiblement *stationnaire*, c'est-à-dire que le nombre annuel des naissances compensait exactement celui des décès et qu'il n'y avait pas de mutations par suite d'émigrations ou d'immigrations ; il fit donc l'énumération de tous les individus qui, pendant l'espace de quatre ans (1687 à 1691), étaient morts entre 0 et 1 an, entre 1 et 2 ans, entre 2 et 3 ans, et ainsi de suite jusqu'au terme le plus reculé de la vie. Il supposa que tous les individus dont il avait énuméré les décès, étaient nés en même temps, et il déduisit de leurs âges respectifs la loi d'après laquelle ils s'étaient successivement éteints. Il fit donc la somme de tous les décès et il en retrancha le nombre des enfants morts entre 0 et 1 an, le reste indiqua le nombre des survivants après la première année ; il retrancha de ce reste le nombre des enfants morts entre 1 et 2 ans, pour obtenir celui des survivants après la seconde année ; et ainsi de suite.

Toutefois la mortalité, pendant la première année, est sujette à de grandes variations, c'est ce qui porta probablement Halley à ne commencer sa table qu'après cette époque, comme on peut le voir dans le tableau de la *mortalité d'après les principales tables de mortalité* connues que nous donnons ci-après, page 87.

La méthode suivie par Halley fut adoptée par Smart, dont la table de mortalité, calculée d'après les registres mortuaires de Londres, fut corrigée et publiée en 1742 par Simpson ; elle fut également adoptée par Dupré de Saint-Maur qui se servit des registres de trois paroisses de Paris et de douze paroisses de la banlieue. La table de ce dernier savant, publiée en 1767 par Buffon, a été rectifiée plus tard par Saint-Cyran.

Quand on recueille les données sur les registres mortuaires, il arrive presque toujours que les nombres ont besoin d'être corrigés ; et il en est de même de celles qui résultent du recensement

d'une population. Ces corrections exigent beaucoup de tact et de prudence ; l'une des principales provient de ce que les gens du peuple ne déclarent presque jamais exactement leur âge, qu'ils ne connaissent d'ailleurs qu'approximativement. Le déclarant préfère indiquer le nombre rond le plus voisin ; il en résulte que, pour les âges de 30 ou 40 ans par exemple, les chiffres sont surchargés aux dépens des chiffres voisins ; il convient alors de rétablir la continuité par des calculs convenables.

Au lieu de prendre les registres mortuaires d'une ville ou d'un pays, des statisticiens ont préféré les registres de certaines associations d'hommes et ont suivi les individus un à un, depuis la naissance jusqu'au décès. Ainsi Kersseboom calcula une table de mortalité d'après les rentiers viagers de la Hollande ; et Deparcieux, en 1746, d'après les tontiniers de France.

Méthode directe. Elle consiste à séparer la population par âges et à calculer directement la mortalité de chaque groupe. Ainsi, pour la France, on comptera combien d'individus ont moins d'un an, de un à deux ans, de deux à trois ans, etc. ; puis, combien chaque groupe produit annuellement de décès : les rapports entre les nombres respectifs feront connaître la *mortalité de chaque âge*. On part en général d'un nombre rond, 10,000 ou 100,000 par exemple, qui représente le nombre des naissances ; ce nombre, après la première année, doit être réduit proportionnellement à la mortalité de cet âge. Le second nombre à son tour doit être réduit, après la deuxième année, proportionnellement à la mortalité des enfants de un à deux ans, et ainsi de suite. On voit que trois éléments doivent concourir aux calculs, les naissances, les décès par âges et la population par âges.

La méthode des listes mortuaires est beaucoup plus expéditive dans la pratique, puisqu'elle n'emploie pour éléments de calcul que les décès de chaque âge, et qu'elle suppose le nombre des naissances égal à la somme de tous les décès. Aussi en a-t-on souvent fait usage ; mais elle admet implicitement une condition qui se réalise rarement, c'est celle d'une population *stationnaire* pendant toute l'étendue d'un siècle.

Il ne suffit pas même que la population soit stationnaire,

comme l'entendent quelques écrivains, c'est-à-dire que les naissances soient annuellement en même nombre que les décès ; il faut encore que la mortalité ne se déplace pas.

Au reste , dans certaines circonstances, une population peut cesser d'être stationnaire, sans que pour cela il devienne nécessaire de modifier la table de mortalité déduite des seules listes mortuaires : il suffit, en général, que la population augmente ou diminue également dans toutes ses parties.

Un pays, par exemple, se trouve dans l'aisance, et toutes les classes d'individus se ressentent de ce bien-être ; la mortalité diminuera pour tous les âges ; il s'ensuivra naturellement que le nombre des adultes devenant plus grand, le nombre des naissances suivra la même progression. Dans cet état de choses, la table de mortalité restera la même ; cependant la population n'aura pas été stationnaire, tout se passe comme si elle croissait progressivement par l'addition de certaines provinces ayant la même mortalité et la même fécondité.

Il est essentiel de remarquer cependant que, bien que les chiffres des décès donnent lieu à une table de mortalité identiquement la même, les prévisions calculées primitivement doivent se trouver modifiées pendant les périodes subséquentes d'accroissement ou de diminution de la population ; par exemple, la vie probable de l'enfant naissant, qui, d'après la table de Duvillard, serait de près de vingt ans, se trouverait allongée ou raccourcie, parce que, sur les 1000 nouveau-nés, il se trouverait, à vingt ans, plus ou moins de 500 survivants, contrairement à nos prévisions.

Mais il n'arrive pas toujours que la population d'un pays soit croissante ou décroissante, dans toutes ses parties en même temps ; on remarque plus souvent que les accroissements, surtout, se produisent par des excès de naissances. Dans ce cas, qui est celui que présentent la plupart des États actuels, les listes mortuaires doivent donner lieu à des tables de mortalité trop rapides : c'est de quoi la Belgique présente un exemple assez frappant. Avant le recensement de 1845, on se bornait à l'emploi des listes mortuaires dans le calcul des tables de mortalité, parce qu'on regardait, bien qu'à tort, la population comme

n'étant pas suffisamment bien connue. Depuis cette époque, une table a été calculée directement avec toutes les garanties d'exactitude que comportent les tableaux statistiques de ce pays. On pourra voir, par la comparaison des deux tables, que la mortalité, pour le premier âge, est sensiblement plus rapide dans l'ancienne table que dans la nouvelle ; et, après l'âge de vingt ans, les deux tables marchent à peu près d'accord. Un examen attentif des nombres qu'elles renferment prouve en effet que, depuis près d'un quart de siècle, la population a crû dans une progression à peu près géométrique ; et si elle était croissante avant cette époque, elle a dû l'être plutôt par une diminution de mortalité dans chaque catégorie d'âges ; ce qui revient au cas mentionné précédemment.

AGES.	TABLE DE MORTALITÉ d'après la méthode	
	directe A.	des listes mortuaires B.
Naissance.	10000	10000
1 an.	8497	7945
2 ans	7882	7123
5 »	7253	6284
10 »	6886	5822
15 »	6626	5555
20 »	6350	5225
25 »	6036	4846
30 »	5730	4539
35 »	5427	4240
40 »	5110	3932
45 »	4759	3592
50 »	4401	3288
55 »	3968	2972
60 »	3454	2616
65 »	3837	2162
70 »	2161	1655
75 »	1394	1098
80 »	750	599
85 »	312	242
90 »	92	68
95 »	18	13
100 »	2	1

On voit que la table calculée dans l'hypothèse d'une population stationnaire donne, pour l'enfance, une mortalité beaucoup plus rapide que l'autre table. Après vingt ans, le désaccord est plus apparent que réel ; c'est de quoi l'on pourra s'assurer en jetant les yeux sur une table que nous donnons plus loin et qui établit une comparaison entre les principales tables de mortalité connues. Mais nous entrerons d'abord dans quelques détails sur ces tables.

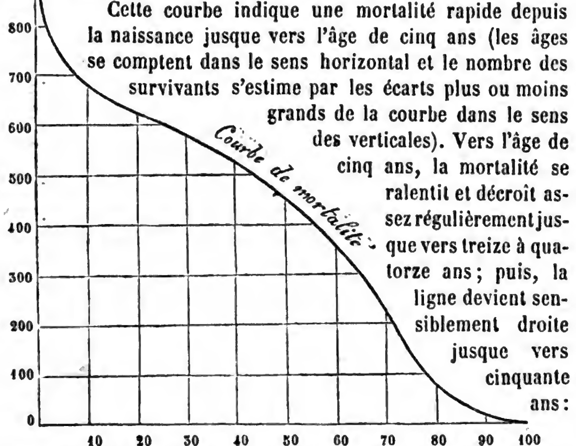
Les plus anciennes sont celles de Halley, de Smart, de Dupré de Saint-Maur, de Kersseboom, de Deparcieux, qui ne sont plus guère en usage ; les tables de Wargentin pour la Suède ; les tables allemandes de Sussmilch que Baumann corrigea dans la quatrième édition de l'ouvrage *Die göttliche Ordnung*, etc., publié en 1775 ; celles de Muret, publiées en 1776, d'après les décès de quarante-trois paroisses du pays de Vaud ; les tables que Price donna, en 1783, pour la ville de Northampton ; celles calculées pour la France, en 1806, par Duvillard, « d'après un assez grand nombre de faits recueillis avant la révolution en divers lieux ; » celles données par Milne, pour la ville de Carlisle, d'après les recensements de 1779 et 1787 ; et celles formées, en 1826, par Finlaison, d'après les registres de diverses tontines instituées en Angleterre de 1693 à 1789.

L'auteur de ce traité qui, en 1825, avait calculé une table de mortalité des deux sexes pour la ville de Bruxelles, donna, en 1832, des tables générales pour la Belgique : elles faisaient, pour la première fois, la distinction entre le séjour des villes et celui des campagnes. Ces tables avaient pour éléments les données recueillies dans les registres de l'état civil du royaume, pendant les trois années antérieures à 1830 ; elles furent vérifiées, en 1849, à l'occasion de la fondation de la caisse générale des pensions de retraite par le gouvernement belge qui les prit pour base de ses tarifs. (Voyez la table B, page précédente.)

En 1838, parurent les nouvelles tables de mortalité pour la France, calculées par M. de Monferrand, lesquelles établissent une distinction pour les sexes et pour les classes plus ou moins privilégiées ; la table mentionnée plus loin se rapporte aux hommes et à la France entière ; nous citerons encore les tables de

M. William Farr, pour l'Angleterre et pour plusieurs des principales villes de ce royaume; les tables du docteur Casper, pour Berlin, et celles de Hülsse, pour Leipzig.

Des statisticiens ont essayé de faire des tables spéciales pour quelques professions, comme on en avait fait pour les sexes et le séjour des villes et des campagnes : il est certain que la mortalité varie considérablement d'après les travaux plus ou moins pénibles, plus ou moins prolongés, auxquels les hommes sont assujettis. La durée de la vie, comme nous l'avons fait observer déjà, n'est pas la même pour le riche et pour le pauvre, pour l'ouvrier des fabriques et pour l'agriculteur, pour le médecin, le militaire et le rentier. Ces nuances doivent être prises en considération, quand on aspire à une grande exactitude; mais elles appartiennent plutôt à la science qu'à la pratique.



On se rend généralement mieux compte de la fluctuation des nombres au moyen d'une courbe; nous en placerons ici un exemple pour la Belgique.

Cette courbe indique une mortalité rapide depuis la naissance jusque vers l'âge de cinq ans (les âges se comptent dans le sens horizontal et le nombre des survivants s'estime par les écarts plus ou moins grands de la courbe dans le sens des verticales). Vers l'âge de cinq ans, la mortalité se ralentit et décroît assez régulièrement jusque vers treize à quatorze ans; puis, la ligne devient sensiblement droite jusque vers cinquante ans: les pertes annuelles sont à peu près uniformes, mais comme elles se font sur une population qui décroît d'année en année, elles deviennent relativement de plus en plus sensibles.

Passé cinquante ans, la mortalité croît rapidement jusqu'au dernier terme de la vie.

En résumé, le danger de mourir dans l'année décroît depuis la naissance jusqu'à l'âge de treize à quatorze ans, très-rapidement d'abord; puis, d'une manière à peu près insensible : après le minimum, le danger de mourir augmente progressivement jusqu'à la fin de la vie, mais surtout après cinquante ans.

Les tables de mortalité des différents pays s'accordent à donner des résultats analogues; seulement quand on calcule le danger annuel de mourir, toutes les tables ne donnent pas la même continuité dans les nombres, parce que les auteurs n'ont pas également pris soin de faire les corrections qu'indique la science, et particulièrement au sujet de la mortalité des âges qui peuvent s'exprimer en nombres ronds, comme nous l'avons fait remarquer déjà.

Mortalité annuelle d'après les différentes tables.

	Naissance.	5 ans.	10 ans.	20 ans.	40 ans.	60 ans.	75 ans.
Equitable Society.	0.154	0.018	0.005	0.006	0.014	0.028	0.057
Carlisle. — Milne.	0.154	0.018	0.005	0.007	0.014	0.033	0.095
France. — Deparcieux	»	0.019	0.009	0.010	0.011	0.029	0.090
Angleterre. — Farr	0.146	0.014	0.007	0.008	0.013	0.030	0.093
» Finlaison.	0.019	0.009	0.006	0.012	0.013	0.032	0.084
France.— De Monferrand	0.174	0.016	0.008	0.009	0.010	0.031	0.122
Belgique. — Quetelet *A*.	0.150	0.014	0.008	0.009	0.013	0.033	0.100
» » *B*.	0.206	0.020	0.009	0.014	0.016	0.031	0.101
Hollande. — Kersseboom	0.194	0.018	0.010	0.011	0.015	0.032	0.086
Suède. — Wargentin.	0.220	0.018	0.008	0.009	0.013	0.037	0.111
Brandebourg. — Sussmilch . . .	0.225	0.031	0.012	0.009	0.012	0.039	0.139
Canton de Vaud. — Muret. . . .	0.189	0.018	0.008	0.007	0.012	0.048	0.101
Allemagne.— Baumann.	0.250	0.021	0.009	0.012	0.019	0.043	0.102
France. — Duvillard.	0.233	0.017	0.007	0.012	0.019	0.044	0.123
Northampton. — Price.	0.238	0.029	0.009	0.014	0.021	0.040	0.096
Breslau. — Halley	»	0.030	0.012	0.010	0.020	0.041	0.124
Paris. — Dupré de Saint-Maur. . .	0.269	0.032	0.010	0.013	0.026	0.052	0.114
Leipzig. — Hulsse.	0.304	0.016	0.006	0.015	0.016	0.044	0.153
Berlin. — Casper.	0.282	0.018	0.005	0.015	0.027	0.035	0.126
Londres. — Smart.	0.275	0.027	0.013	0.015	0.034	0.054	0.090
Moyenne. . . .	0.206	0.020	0.008	0.011	0.017	0.039	0.106

Nous ferons connaître maintenant quelques-unes des principales applications des tables de mortalité.

Parlons d'abord de la *vie probable;* c'est ainsi qu'on appelle le nombre d'années après lequel la probabilité d'exister et celle de ne pas exister sont les mêmes ; ou bien, le nombre d'années après lequel les individus d'un même âge se trouvent numériquement réduits de moitié.

D'après la table de Smart, la vie probable des enfants naissants était, pour la ville de Londres, vers le milieu du siècle précédent, de quatre ans seulement, c'est-à-dire qu'au commencement de la quatrième année, de 1200 enfants supposés nés en même temps, il n'en restait plus que 600. D'après la table de Finlaison, la vie probable pour l'enfant naissant, chez les tontiniers, était de 55^{ans},6, c'est-à-dire environ quatorze fois plus longue ; cette différence est énorme. Elle est plus grande encore si l'on compare la vie probable déduite de la table de Finlaison à celle déduite de la table de Sussmilch pour la ville de Vienne en Autriche, laquelle n'est que d'un an et demi environ : le rapport est de 1 à 36 environ ! Quand un élément statistique peut varier entre des limites aussi larges, il est impossible de l'employer comme base de calculs qui aient quelque valeur dans la pratique.

Il est de la plus grande importance pour les États, de connaître avec exactitude et de chercher à combattre la mortalité de la première enfance, puisqu'elle peut varier dans des limites aussi larges. Si c'est, avant tout, une question d'humanité, c'est en même temps un objet d'intérêt public : un enfant qui meurt avant d'avoir pu se rendre utile ne devient pas seulement un sujet d'affliction pour la famille, mais encore une perte réelle. Considérée au point de vue de l'État, une excessive mortalité de l'enfance est une cause permanente d'appauvrissement ; et celui qui parvient à la combattre ajoute des millions au revenu national, en même temps qu'il sèche bien des larmes.

Le tableau qui suit fait connaître, d'après les 20 tables citées plus haut, la longueur de la vie probable aux différents âges. Les nombres sont classés en commençant par les plus favorables.

Vie probable d'après les différentes tables de mortalité.

	Naissance.	5 ans.	10 ans.	20 ans.	40 ans.	60 ans.	75 ans.
	ans.	ans.	ans.	ans.	ans.	ans.	ans.
Angleterre. — Equitable society. .	41,8	56,4	53,0	44,5	29,4	16,5	7,7
Carlisle. — Milne.	41,5	57,0	53,3	44,8	28,8	14,1	6,0
France. — Deparcieux	»	54,1	51,8	44,2	29,0	14,0	5,8
Angleterre. — Farr	45,4	55,8	52,3	44,1	28,5	13,5	5,7
» Finlaison	55,6	53,4	49,4	41,6	28,0	13,9	6,6
France. — De Monferrand	42,0	56,0	52,5	44,1	28,2	12,9	5,2
Belgique. — Quetelet *A*.	41,6	53,5	50,0	42,4	27,1	12,9	5,6
» » *B*.	22,9	47,3	45,9	40,1	27,0	13,1	5,7
Hollande. — Kersseboom	30,9	47,0	44,9	38,0	25,9	13,8	6,0
Suède. — Wargentin.	33,2	51,3	48,8	40,7	25,5	12,2	5,3
Brandebourg. — Sussmilch. . . .	25,5	51,3	49,5	41.7	25,7	11,8	4,7
Vaud. — Muret.	41,0	52,9	49,5	40,6	24,8	10.7	4,4
Allemagne. — Baumann, Sussmilch.	17,7	46,2	43,8	36,0	22,5	10,8	5,5
France. — Duvillard.	20,5	45,7	42,9	35,8	23,3	11,1	4,8
Northampton. — Price	7,9	41,6	40,4	33,6	21,3	12,8	5,9
Breslau. — Halley.	»	43,1	41,5	34,3	22,0	11,9	4,6
Paris. — Dupré de Saint-Maur. . .	8,1	41,4	40,1	33,5	21,8	10,2	4,5
Leipzig. — Hulsse.	21,1	44,2	41,0	33,4	20,8	9,7	4,0
Berlin. — Casper.	21.1	43,0	39,7	30,9	20,0	10,3	4,6
Londres. — Smart.	4,0	35,4	33,2	26,9	17,6	10,8	»
Vienne. — Sussmilch	1,6	37,0	37,2	30,5	19,3	10,0	4,9

D'après les tables des différents pays, nous avons vu que, pour la première enfance, la mortalité varie dans des limites très-larges; il n'en est plus de même quand on arrive à l'âge de cinq ans : à cette époque, la table de mortalité la plus défavorable, celle de Smart, donne, pour la vie probable à Londres, 35ans,4; et la table la plus avantageuse, celle de Carlisle, donne 57 ans : le rapport de ces nombres est à peu près de 3 à 5. Le même rapport subsiste entre les nombres qui indiquent les extrêmes de la vie probable à 10, à 20, à 40 et à 60 ans, et ces limites seraient plus resserrées encore, si l'on abandonnait la table de Smart qui appartient évidemment à une population placée dans des circonstances très-désavantageuses; le rapport alors n'est plus que de 5 à 7. C'est donc avec raison que Deparcieux ne commençait sa table qu'à l'âge de trois ans; avant cette époque, en effet, les calculs ne reposent sur aucune base solide. Il est à remarquer que c'est vers l'âge de 4 à 5 ans que la vie probable atteint son *maximum*.

On juge assez mal d'une table de mortalité à la première inspection des chiffres qu'elle présente : on a commis bien des erreurs à cet égard. On serait disposé à croire, au premier abord, que la table de Finlaison présente des chiffres plus favorables qu'aucune autre table; et cependant le tableau précédent nous montre déjà qu'elle n'arrive guère qu'en cinquième ou sixième ligne.

Les statisticiens font souvent usage de la *vie moyenne* dans leurs recherches relatives à la population; cet élément se calcule en supposant qu'on fasse un partage égal de tous les âges des individus que l'on considère dans les tables de mortalité : ainsi, d'après la table de Duvillard, la vie moyenne, pour l'enfant naissant, est de 28 ans et demi. On remarquera que, dans ce calcul, on attribue la même valeur à une année quelconque, soit qu'elle appartienne à l'existence d'un enfant ou à celle d'un adulte.

On peut, au moyen d'une table de mortalité, déterminer la probabilité de vivre encore un certain nombre d'années, à un âge quelconque. Si l'on demandait quelle est la probabilité de vivre encore 12 ans, pour un Français âgé de 30 ans, on chercherait, dans la table de Monferrand par exemple, combien il

reste de survivants à 30 et à 42 ans, et l'on trouverait les nombres 560 et 500. Ainsi le Français, de 30 ans, a 500 chances sur 560 d'arriver à l'âge de 42 ans ; et la fraction $\frac{500}{560}$ exprime la probabilité demandée.

On peut aussi déterminer la probabilité que deux personnes dont les âges sont désignés vivront encore après un certain nombre d'années. Cette probabilité est alors composée des deux probabilités simples que chacune de ces personnes vivra encore à l'époque désignée. Par exemple, quelle est la probabilité qu'un individu âgé de 30 ans et son fils âgé de 6 ans vivront encore dans 12 ans? Il faudra multiplier $\frac{500}{560}$ par $\frac{635}{696}$ cette dernière fraction exprime la probabilité de vivre encore 12 ans quand on en a 6 seulement). Le produit indiqué vaut à peu près $\frac{4}{5}$.

En général, quatre événements composés sont possibles; ils sont indiqués ici avec leurs probabilités respectives :

	Probabilités.
Le père et le fils vivront encore	0.815
Le père vivra et le fils sera mort	0.078
Le père sera mort et le fils vivra	0.098
Le père et le fils seront morts	0.009

Les quatre probabilités ajoutées ensemble donnent l'unité, symbole de la certitude; ce qui doit être en effet. L'événement le moins probable c'est qu'après 12 ans le père et le fils seront morts tous deux; la probabilité est de 9 millièmes seulement.

On s'est aussi servi des tables de mortalité pour déterminer combien, sur une population, on compte d'individus d'un âge déterminé, ce qui constitue la *loi de population.* Que l'on fasse en effet la somme de tous les nombres que contient une table de mortalité : Si l'on considère alors ce nombre comme représentant la population, les nombres particuliers de la table représenteront les individus des différents âges dont cette population est composée. Ce calcul du reste ne serait exact que pour autant que la population serait stationnaire et que la mortalité resterait annuellement la même pour les différentes catégories d'âges. Il vaut infiniment mieux pour établir une table de population re-

courir à un dénombrement fait avec soin. Une table pareille présente une grande importance, elle permet à un État d'énumérer les hommes valides dont il peut disposer et le nombre des enfants et des vieillards au soutien desquels il doit pourvoir.

Nous ferons, en passant, une remarque importante, c'est que, dans un pays où la population est croissante par un excès de naissances, il existe une cause de détriment réel ; la portion de la population qui vit aux dépens de l'autre devient relativement de plus en plus grande. Or, un accroissement dans le nombre des naissances est assez généralement produit par un accroissement de prospérité : il résulte donc, dans de pareilles circonstances, que l'effet tend à combattre la cause qui l'a produit.

Il est un préjugé généralement répandu parmi le peuple sur le prétendu danger d'être 13 à table. Si nous regardons cet événement comme composé, sa probabilité se calculera en faisant le produit des treize probabilités simples, relatives à chacun des convives ; or, pour simplifier, supposons que chacun des convives ait le même âge moyen, 35 ans par exemple ; la table de mortalité nous apprend qu'à cet âge la probabilité de vivre encore un an est à peu près $\frac{418}{424}$; la probabilité de l'événement que l'on craint est donc $(\frac{418}{424})^{13}$ ou bien à peu près $\frac{85}{100}$. La probabilité est beaucoup moindre si l'on suppose des enfants et des vieillards parmi les convives; on trouverait même, dans ce cas, qu'il pourrait n'y avoir que 1 contre 1 à parier pour l'arrivée d'un décès au moins. Ce calcul, au moyen d'une mauvaise interprétation, a pu donner lieu à des préjugés d'autant plus ridicules, que des personnes croient conjurer le danger en appelant un plus grand nombre de convives, ce qui ne fait qu'augmenter la probabilité que l'événement redouté aura lieu.

5. SCIENCES MORALES. — Prix des grains. — Sociétés d'assurances. — Distractions et maladresses. — Mariages, crimes, tables de criminalité.

La plupart des éléments qui constituent notre état social subissent des fluctuations : les uns sous l'influence de causes *con-*

stantes, et ils oscillent autour d'un état d'équilibre; les autres sous l'influence de causes *variables,* et ils s'écartent plus ou moins de leur état primitif. C'est ainsi que nous voyons varier les prix des grains, les valeurs des importations et des exportations, le nombre des naissances, des décès, des mariages, des suicides, des crimes même.

En général les causes qui règlent ces éléments divers varient très-peu, et les valeurs oscillent autour d'une moyenne entre des limites qu'il importe de connaître. Ces oscillations s'accomplissent sous l'influence de causes *accidentelles,* dont les effets sont appréciables *à priori,* et qui finissent par s'entre-détruire mutuellement, en sorte qu'il ne reste en définitive que le fait qui, à la longue, se reproduit toujours le même, ou qui varie progressivement, selon que les causes efficientes sont *constantes* ou *variables.*

Il serait assez difficile de citer un fait social uniquement influencé par des causes accidentelles, surtout pendant une période un peu longue. Quand il s'agit de quelques années seulement, on voit le prix du froment, par exemple, conserver une valeur moyenne assez constante, quoique en subissant des fluctuations passagères très-sensibles. En Belgique, pendant les vingt-cinq années de 1825 à 1849 inclusivement, le prix moyen de l'hectolitre de froment a été de 19 fr. 15 c., et les valeurs extrêmes ont été atteintes en 1846 et en 1825; pendant cette dernière année, le prix était de 12 fr. 23 c., et, pendant la première, de 24 fr. 53 c. L'une de ces quantités est double de l'autre, et la moyenne tombe à peu près à égale distance de ces deux valeurs extrêmes. Si les variations de prix étaient purement accidentelles, la moyenne prise sur un grand nombre d'années resterait toujours la même; et chaque écart par rapport à cette moyenne, soit en plus, soit en moins, aurait sa probabilité particulière : plus l'écart serait grand, moins il serait probable.

Ce qui indique le mieux la civilisation d'un peuple et la bonté de ses institutions, c'est le resserrement des limites entre lesquelles oscillent les prix des éléments les plus nécessaires à la vie. Les choses extrêmes sont presque toujours fatales aux hommes.

Les sociétés d'assurances, bien comprises, ont pour effet d'atténuer les effets probables d'événements qui deviennent de grands malheurs quand ils frappent un seul individu, et qui sont à peine sensibles quand ils atteignent à la fois un grand nombre de personnes.

Pour être du domaine des assurances, il faut que les objets assurés soient subordonnés à des causes physiques; il y aurait trop de danger à ce qu'elles fussent sous l'influence de causes purement morales. Les assurances contre des pertes produites par des spéculations industrielles, par de funestes penchants pour le jeu, par des destitutions ou d'autres causes semblables, présenteraient les plus graves inconvénients : ce serait d'ailleurs favoriser l'imprévoyance et parfois faire un appel à de mauvaises passions. Les assurances contre des événements dépendants de causes morales ne peuvent exister que dans les familles ou parmi des personnes d'un caractère honorable, comme dans ces sociétés modernes dont les membres se prêtent un crédit mutuel.

C'est sur l'emploi des tables de mortalité que reposent les opérations des sociétés d'assurances sur la vie, des caisses de retraite et des tontines. Veut-on savoir, par exemple, ce que devrait payer actuellement un homme âgé de trente ans pour avoir droit, à l'âge de quarante-deux ans, à une somme de 1,000 francs en cas de survie, on raisonne ainsi qu'il suit. S'il était sûr de survivre, il aurait à payer actuellement une somme S qui, avec ses intérêts accumulés, formerait 1,000 francs dans douze ans. Mais n'étant pas assuré de survivre et par conséquent de toucher les 1,000 francs, il n'aura à payer que la somme S multipliée par la probabilité $\frac{500}{560}$ de vivre encore.

Quand le terme de l'assurance est très-éloigné, l'accumulation des intérêts d'une part et la faible probabilité de survivre, d'une autre part, permettent, avec une faible somme, de s'en assurer une assez forte dans le cas de survivance. Mais il faut considérer que la société d'assurance diminue cette somme en prélevant un bénéfice pour ses actionnaires et pour ses frais d'administration, à moins que ce soit une société d'assurances *mutuelles,* dans laquelle les assureurs sont en même temps les assurés, et administrent à leur propre bénéfice.

C'est en appliquant à la société la loi curieuse de la permanence des mêmes faits sous l'influence des mêmes causes, que sont fondées la plupart des spéculations qu'on a établies avec plus ou moins de succès pour un état de choses futur. De là les assurances sur la vie, contre les incendies, contre les grêles, contre les sinistres maritimes, etc. Mais pour que le passé puisse donner d'utiles leçons à l'avenir, il faut qu'il ait été observé avec le plus grand soin et sans idées préconçues. Ainsi les tarifs des sociétés d'assurances doivent non-seulement établir des prix équitables, mais il faut encore que le nombre des assurés soit assez grand pour que les causes accidentelles se neutralisent et permettent aux prévisions du calcul de se réaliser : sans cette condition essentielle, les applications de la théorie des probabilités sont absolument sans valeur. Ce qui a le plus entravé jusqu'à présent les opérations des assurances maritimes, c'est que, d'une part, il est difficile d'arriver à constater un ordre de choses normal, et que, de l'autre, les assurances ne sont pas assez nombreuses ni assez diverses pour permettre d'arriver à une concordance exacte entre les prévisions du calcul et les résultats de l'expérience.

Les Anglais ont commencé à établir des assurances contre les dangers que courent les voyageurs sur les chemins de fer. Pour calculer la probabilité d'un sinistre, ils ont dû évidemment étudier d'abord combien il arrive d'accidents sur un nombre donné de personnes parcourant un certain espace; il a fallu, de plus, la présomption que les dangers resteraient les mêmes. Le prix de l'assurance et la valeur à payer en cas de sinistre se règlent dans de pareilles circonstances comme les mises se règlent au jeu, d'après les chances de perte et de gain. La règle est que le prix à payer soit égal à l'*espérance mathématique*, c'est-à-dire à la somme promise, en cas de sinistre, multipliée par la probabilité de l'obtenir, ou par la probabilité du sinistre. Les sociétés d'assurances ont cet avantage de pouvoir, moyennant une rétribution, faire une répartition plus équitable que de simples particuliers.

Le calcul des probabilités a permis d'atténuer, d'après l'expérience du passé, les malheurs accidentels qui atteignent la société

dans quelques-uns de ses membres. On est loin, du reste, d'en avoir tiré jusqu'à présent tous les avantages qu'on est en droit d'en attendre, soit pour les sciences sociales, soit pour les sciences physiques en général.

Ce qui pourra surprendre le plus, c'est que nos maladresses, nos distractions, nos caprices même soient assujettis à la loi des probabilités. Un tireur qui veut atteindre un but pourra le toucher parfois, mais plus souvent il s'en écartera plus ou moins. Les déviations étant mesurées ensuite, et classées selon leurs grandeurs, formeront des groupes dont les relations numériques sont assignables *à priori*. Selon le plus ou moins d'adresse des tireurs, les déviations seront plus ou moins grandes ; mais les relations numériques resteront les mêmes dans les différents groupes qui appartiennent à un même tireur : chaque déviation a sa probabilité spéciale.

Pour ce qui concerne les distractions, on a remarqué depuis longtemps que le nombre des lettres jetées au rebut par l'administration des postes, pour insuffisance d'adresse ou pour oubli de toute autre formalité, se trouve chaque année à peu près exactement le même. Quand on aura une plus grande expérience des chemins de fer, nul doute qu'on ne trouve aussi une certaine fixité dans le nombre et la qualité des objets oubliés ou perdus, ainsi que dans la quantité de bévues, de maladresses de voyageurs et d'accidents, en supposant, bien entendu, que toutes les autres influences restent les mêmes.

Il y a plus : les mariages, qui sont censés devoir présenter les traces des caprices et des fluctuations des hommes, se succèdent de la manière la plus régulière. Tout se passe annuellement comme si les contingents étaient fixés par provinces, par âges, par professions, ou comme si l'on s'était entendu pour produire, par exemple, le même nombre d'unions entre de jeunes femmes et de vieux célibataires, ou entre de jeunes garçons et de vieilles filles, etc.

Il faut remarquer, du reste, que la théorie des probabilités est essentiellement fausse quand elle s'applique à des individus ; elle n'a de valeur que quand on opère sur de grands nombres, pour lesquels les effets du libre arbitre, des caprices ou des pas-

sions peuvent se neutraliser mutuellement. Qui songerait à calculer, pour une personne désignée, l'âge auquel elle mourra? Et cependant l'utilité des tables de mortalité n'est point contestée. Il en est de même des âges auxquels on se marie; les nombres y procèdent avec plus de régularité encore que ceux relatifs aux âges où l'on meurt.

L'application de la théorie des probabilités aux phénomènes sociaux a donné naissance à une branche intéressante de la science, à la *statistique morale,* qui, bien que naissante, a déjà produit des résultats importants.

Cependant les abus qu'on en a faits, soit par ignorance, soit par le désir de faire prévaloir des opinions préconçues, ont excité de justes défiances, et ont nécessairement porté obstacle à ses progrès. La statistique morale aura le sort de toutes les sciences; ce n'est qu'en surmontant les difficultés sans nombre qui entourent son berceau, qu'elle finira par prendre le rang qui lui appartient.

Il est à remarquer du reste que, quand les hommes agissent librement, et sans être mus dans un sens déterminé par des causes d'intérêt particulier, les phénomènes qui les concernent s'accomplissent *plus régulièrement* que les phénomènes purement physiques. Ceci peut étonner au premier abord, et cependant c'est un résultat qui se confirme par l'expérience et même par le raisonnement.

Dans un État toujours le même, soumis aux mêmes habitudes, régi par les mêmes lois, conservant les mêmes besoins et les mêmes ressources, subissant, en un mot, l'effet des mêmes causes, on observera toujours les mêmes effets. Ce principe, rigoureux dans les sciences physiques, ne l'est pas moins dans les sciences morales et politiques. Les naissances, les mariages, les crimes pourront subir des altérations d'une année à l'autre sous l'influence de causes accidentelles; mais les moyennes prises sur une série d'années un peu longue se reproduiront identiquement les mêmes, si les causes n'ont pas changé.

A voir les premiers documents publiés par le ministère de la justice en France, il était aisé de reconnaître que la série des faits qu'ils exposent se reproduirait et devrait se repro-

duire annuellement d'une manière constante. C'est ce qui fit dire à l'auteur de cet ouvrage : *Il est un budget qu'on paye avec une régularité effrayante, c'est celui des prisons, des bagnes et des échafauds ; c'est celui-là surtout qu'il faudrait s'attacher à réduire.* Cette phrase, souvent répétée, mais mal comprise d'abord, souleva chez quelques personnes de vives réclamations ; on crut y voir l'expression d'un matérialisme désolant, tandis qu'elle n'était que la traduction d'un fait qui pouvait se modifier sous l'influence de circonstances meilleures.

Sans doute le nombre des crimes *peut diminuer*, si les causes qui les produisent viennent à changer ; mais, depuis un quart de siècle que l'on observe, rien ne prouve encore qu'en France on ait obtenu des changements à cet égard. C'est vers l'âge de 24 ans que l'homme y manifeste les plus de penchant au crime ; et ce fait est si constant qu'il a été constaté par les résultats de chaque année prise séparément. A partir de là, ce penchant s'affaiblit faiblement jusqu'à l'âge de 35 à 40 ans, puis d'une manière plus rapide jusqu'à la fin de la vie. Il est à remarquer que cette loi se vérifie dans des limites plus étroites que la loi même de la mortalité.

Le penchant au crime dépend autant de notre nature intime que de l'éducation que nous avons reçue et des milieux dans lesquels nous vivons ; il est toujours possible de les modifier ; on remarque toutefois que ce penchant varie peu en passant d'un pays à un autre; les différences sont même plus sensibles, quand on fait la distinction des sexes ou de la nature des crimes, que quand on fait celle des nations. Les tableaux suivants relatifs à la France et aux années 1826 à 1844 mettent en évidence l'influence des sexes et des âges sur les crimes de différente nature. On a tenu compte de la grandeur relative de la population de chaque âge et on a fait usage du chiffre des accusés. Du reste les lois restent sensiblement les mêmes en substituant aux accusés les condamnés ou même les acquittés.

	CRIMES EN GÉNÉRAL.	CRIMES CONTRE LES		DISTINCTION DES SEXES.		DISTINCTION DES CRIMES.							
		PROPRIÉTÉS.	PERSONNES.	HOMMES.	FEMMES.	VOLS.	VIOL.	COUPS ET BLESSURES.	MEURTRE.	ASSASSINAT.	EMPOISONNEM	FAUX DIVERS	FAUX TÉMOIGN.
Moins de 16 ans.	0,3	0,3	0,1	0,3	0,2	0,4	0,1	0,1	0,2	0,1	0,3	0,1	0,1
De 16 à 21 »	12,1	13,7	8,7	12,6	10,6	16,0	14,1	10,9	7,3	6,0	3,4	3,8	4,6
21 à 25 »	13,8	13,7	16,0	13,7	17,0	18,4	14,3	13,3	13,3	14,2	9,5	10,1	9,1
25 à 30 »	14,6	14,1	13,8	14,6	15,0	14,7	12,6	20,1	16,9	14,4	13,9	11,8	8,8
30 à 35 »	13,3	13,0	13,8	13,3	12,8	13,2	11,1	16,7	14,0	13,3	12,2	13,4	11,0
35 à 40 »	10,8	11,0	10,5	10,8	11,4	10,7	8,8	11,8	11,1	10,8	11,3	12,8	11,7
40 à 45 »	8,9	9,1	8,5	8,8	9,5	6,6	7,5	6,8	8,3	9,7	13,0	11,5	11,0
45 à 50 »	7,0	7,0	6,8	6,8	6,0	6,4	6,4	6,3	7,3	8,2	9,4	9,7	10,0
50 à 55 »	5,1	5,1	5,2	5,1	5,5	4,5	4,1	4,7	5,8	6,3	6,5	7,6	9,3
55 à 60 »	3,9	3,8	4,3	3,9	4,0	3,1	4,4	3,3	4,5	5,2	4,8	5,5	8,3
60 à 65 «	3,4	3,1	4,0	3,3	3,5	2,6	4,8	2,9	4,0	4,3	4,8	5,4	6,9
65 à 70 »	2,5	2,2	3,1	2,5	2,4	1,8	5,2	1,6	3,0	3,2	5,1	3,9	5,4
70 à 80 »	1,6	1,4	2,1	1,7	1,4	1,2	4,3	0,8	1,7	1,7	3,0	3,0	3,8
80 et plus.	0,7	0,5	1,1	0,6	0,9	0,4	2,1	0,5	0,6	0,6	2,8	1,4	»
	100,0	100,0	100,0	100,0	100,0	100,0	100,0	100,0	100,0	100,0	100,0	100, 0	100,0

Huit espèces de crimes sont spécifiées dans ce tableau ; ces crimes se succèdent dans l'ordre où ils se manifestent en France, sous le rapport de la précocité. Le penchant au vol se présente en première ligne ; c'est vers l'âge de 22 ans qu'il se développe avec le plus d'intensité, puis il diminue progressivement jusqu'aux dernières limites de la vie.

La tendance au viol est également un des penchants criminels qui sont les premiers à se développer dans toute leur intensité ; le maximum se manifeste même avant l'âge de 22 ans. Ce crime présente cette circonstance toute particulière qu'après avoir diminué, pour la fréquence, jusqu'à l'âge de 50 à 55 ans, il reprend ensuite un nouveau degré d'énergie et passe par un nouveau maximum entre 65 et 70 ans.

C'est vers l'âge de 28 ans que l'homme, en France, est le plus porté à se rendre coupable de coups et blessures. Cette époque critique se manifeste avant 27 ans pour les meurtres, et vers 30 pour les assassinats ; puis, l'âge amortit graduellement ces tendances, plus rapidement pour les coups et blessures, et plus lentement pour les assassinats.

Les empoisonnements et les faux de toute espèce semblent être particulièrement le partage de l'homme mûr. Pour le premier genre de crimes, on reconnaît deux *maxima*, l'un entre 25 et 30 ans, et l'autre entre 40 et 45. Pour les faux, on trouve le maximum entre 35 et 40 ans.

CONCLUSIONS.

Ce qui précède nous montre qu'il existe bien peu de choses dont nous puissions acquérir la certitude, et que la plupart de nos connaissances, celles même sur lesquelles nous aimons le plus à nous appuyer, ne sont fondées que sur des probabilités plus ou moins fortes. Il est donc intéressant de pouvoir apprécier la valeur de ces probabilités, non pour en faire l'application à quelques cas particuliers, qui mettraient nos calculs en défaut; mais pour nous élever à la connaissance des résultats que doivent amener les mêmes causes toujours agissantes, qu'elles soient connues ou que leur existence et leur mode d'action soient révélés par l'expérience seulement.

Le hasard, ce mot mystérieux dont on a tant abusé, ne doit être regardé que comme servant à couvrir notre ignorance; c'est un fantôme qui exerce l'empire le plus absolu sur le vulgaire, habitué à ne considérer les faits qu'isolément, mais qui s'anéantit devant le philosophe dont l'œil embrasse une longue suite d'évé-

nements, et dont la pénétration ne saurait être mise en défaut par des écarts qui disparaissent à ses yeux quand il sait se placer assez haut pour saisir les lois de la nature. Ces lois sont éternelles, immuables comme l'intelligence d'où elles découlent; il n'est pas en notre pouvoir de les dénaturer; mais il est de la dignité de l'homme de chercher à les saisir au milieu des anomalies sans nombre qu'elles semblent présenter.

Un des plus grands mérites des sciences modernes est d'avoir pu soumettre à la précision des nombres la détermination de la plupart des grands principes qui paraissaient devoir leur échapper; cette détermination n'a rien d'arbitraire; elle ne donne point prise aux subtilités de mots dont on a tant abusé; c'est par des faits qu'elle s'obtient, et par des faits susceptibles d'être appréciés numériquement.

Ainsi, l'on a vu le calcul des probabilités qui a pris naissance depuis deux siècles au plus, et qui avait essayé ses forces en montrant la vraie théorie qui doit régler les jeux de toute espèce, faire tout à coup incursion dans le domaine des sciences naturelles pour indiquer les lois des naissances et de la mortalité, dans celui des sciences physiques pour enseigner à estimer la précision des résultats observés, dans le champ des sciences historiques pour apprécier la valeur des faits et des traditions ; on l'a vu depuis, sous différents noms, se rapprocher de la tribune et régler la théorie des élections, ou énumérer les richesses et les besoins des peuples par des nombres auxquels nulle éloquence humaine ne pourrait résister. Tout ce qui peut être exprimé numériquement devient de son ressort : plus les sciences se perfectionnent, plus elles tendent à rentrer dans son domaine, qui est une espèce de centre vers lequel elles viennent converger. On peut même juger du degré de perfection auquel une science est parvenue par la facilité plus ou moins grande avec laquelle elle se laisse aborder par le calcul, et ainsi même se justifie le proverbe ancien, placé en tête de cet ouvrage : *mundum numeri regunt.*

FIN.

TABLE DES MATIÈRES.

PREMIÈRE PARTIE.

PROBABILITÉS QUAND LES CHANCES SONT CONNUES.

DEUXIÈME PARTIE.

PROBABILITÉS QUAND LES CHANCES SONT INCONNUES.

TROISIÈME PARTIE.

APPLICATIONS DE LA THÉORIE DES PROBABILITÉS AUX SCIENCES D'OBSERVATION.

4.4

